KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Talföljder, summor och rekursioner

Matematiska institutionen, 2000

1. Introduktion

Talföljder, summor och rekursioner är ett tämligen stort område som har tillämpningar inom samtliga delar av matematiken. Vi har här försökt samla dessa ämnen till en enhetlig framställning. Vi förutsätter inga större kunskaper hos läsaren. Däremot är texten ganska kompakt, vilket innebär att man måste läsa den sakta och då och då ta fram penna och papper för att räkna litet. Det är oftast väldigt givande för förståelsen att fylla i de detaljer som hoppas över av författaren.

Metodik när man ska lösa problem är förstås ett omfattande ämne i sig[1]. Låt oss bara i korthet säga att det i allmänhet handlar om att formulera om ett problem till något man kan, och att "något man kan" även kan vara något man nyss lärt sig. Övning ger färdighet, och om du kör fast så fråga. Om ingen av oss finns till hands går det alltid bra att fråga en kompis. Dessa kan ofta ge de bästa svaren.

I texten finns många *definitioner*, tex vad en talföljd är, och ett antal *satser*, tex formeln för en geometrisk summa. Satserna följs i allmänhet av ett bevis, om detta kan antas vara begripligt för läsaren. Detta är den gängse formen att beskriva matematik, och den har fördelen att allt är väldigt tydligt och stringent. Problemet är att det ofta blir svårt att förstå det som skrivs, och framför allt *vad* man använder satserna till. Vi har därför i vissa avsnitt antagit en mer avslappnad attityd till matematiken. Det är vår förhoppning att dessa delar ändå är tillräckligt tydliga.

Tänk på att en hel del information finns att hämta bland de lösta exemplen. Hoppa inte över dessa. Fotnötterna kan däremot skippas, även om de för det mesta är mycket läsvärda.

Detta kompendium har skrivits gemensamt av Magnus Aspenberg, Kristian Bjerklöv, Niklas Eriksen och Magnus Rosenlund, samtliga doktorander på KTH. Dessutom har Göran Selander deltagit i de förberedande diskussionerna. Omslagsbilden har ritats av Johan Aspenberg.

[1] Se t ex Polya: *How to solve it.*

2. Inledande exempel

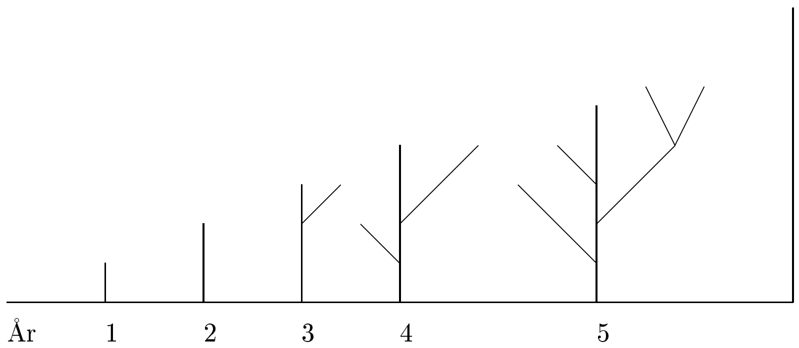
Talföljder är en del av matematiken som man kan komma i kontakt med som lekman och ändå förstå och fascineras av. Tag till exempel $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$. Vad kommer sedan? Svaret överlåtes till läsaren. Ingen högre utbildning behövs för att kunna lösa detta. För matematikintresserade kan talföljder roa i timtal. Men är talföljder till för knep & knåp som man bara ägnar sig åt på fritiden? Nej. Talföljder är en grund för mycket inom matematik och återkommer gång på gång. Det finns talföljder som har hisnande samband med mönster i naturen. Ett exempel är följden $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Läsaren uppmanas åter att lista ut nästa tal, ty snart avslöjas svaret. Talföljden är en av de mest kända och studerades på 1200-talet av en italienare från Pisa vid namn Leonardo Fibonacci. Varje tal i Fibonacciföljden är summan av de två föregående om man startar med $1, 1$. Regeln är alltså mycket enkel.

Fibonaccitalen är ett exempel på en rekursiv konstruktion. Ovan nämndes att n:te talet i Fibonacciföljden är summan av de två föregående. Om vi betecknar det n:te Fibonaccitalet med F_n så gäller alltså

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{2.1}$$

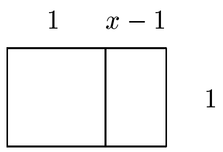
Om man nu sätter $F_1 = F_2 = 1$ kan man sedan få alla nästföljande tal via rekursionsformeln ovan. Begreppet rekursion kommer att avhandlas senare i kompendiet.

Trots enkelheten döljer sig oanade hemligheter i Fibonacciföljden. Talföljden används bl a som modell av hur ett träd växer. Modellen är mycket enkel: Efter att varje gren växt i två år växer det varje nästföljande år ut en ny gren från den ursprungliga. Man startar med en stam (som också betraktas som en gren) som växer upp från marken två år innan någon gren växer ut från den. Ett träds tillkomst genom denna modell kan åskådliggöras i nedstående figur.



Man kan nu fråga sig vad dessa tal har med trädet att göra. Räknar man antalen grenar efter n år får man precis det n:te Fibonaccitalet!

En annan speciell egenskap hos Fibonaccitalen är att de har ett samband med ett känt tal benämt *det gyllene snittet*. Det gyllene snittet är helt enkelt talet $(\sqrt{5}+1)/2$. Låt oss börja med att betrakta en rektangel som har den lustiga egenskapen att om man tar bort största möjliga inskrivna kvadrat så att det bara återstår en rektangel så är denna likformig med den ursprungliga rektangeln (se figur).



En sådan rektangel kallas för en gyllene rektangel. Vad skall förhållandet vara mellan rektangelns sidor för att detta skall ske? Om vi kallar långsidan för x i figuren ovan får vi villkoret för likformighet:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}, \tag{2.2}$$

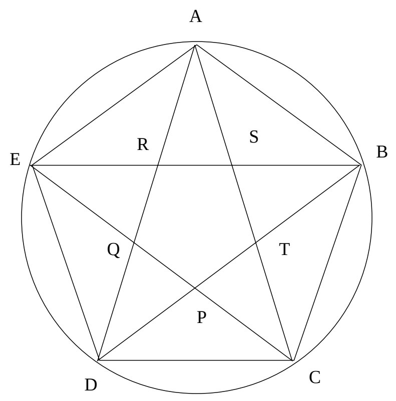
eller

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{2.3}$$

Uppenbarligen är $x > 1$ så lösningen till denna ekvation är $(\sqrt{5}+1)/2$ som är det gyllene snittet. Återigen undrar man vad detta har med Fibonaccitalen att göra. Detta upptäcker man om man studerar kvoten på två på varandra följande tal i Fibonacciserien. Ju längre fram i serien vi går, desto närmre kommer kvoten det gyllene snittet. Beviset för detta är en övning i avsnittet om induktion.

En gyllene rektangel anses vara särskilt lyckad i estetiskt avseende. Vykort och biodukar har t ex detta förhållande.

Låt oss nu titta på ett annat fall, nämligen det mystiska pentagrammet, som man får genom att ta en regelbunden femhörning och rita alla diagonaler. Diagonalerna bildar då en femuddig stjärna. Om man dessutom omskriver en cirkel runt denna stjärna och bortser från femhörningen så får man ett pentagram. Femhörningen kommer dock att vara ett stöd för tanken när vi nu skall se var det gyllene snittet dyker upp i denna figur.



Observera att vinkeln DQC är samma som RSA, som i sin tur är samma som DCA. Eftersom trianglarna ADC och DCQ därmed har två vinklar som är samma är de likformiga. Vidare är de båda likbenta, eftersom $AD = AC$ och $DC = QC$. Likformigheten ger

$$\frac{AD}{QC} = \frac{QC}{QD}. \tag{2.4}$$

Men $QC = AQ$ (verifiera!) så

$$\frac{AD}{QC} = \frac{AQ}{QD}. \tag{2.5}$$

När en sträcka såsom AD delas i punkten Q, så att ovanstående förhållande gäller, så kallade de gamla grekerna detta för det gyllene snittet och det är härifrån begreppet kommer. Låt oss undersöka kvoten $\frac{AD}{QC}$. För enkelhets skull antar vi att sträckan $AQ = QC = 1$ och sätter $\phi = \frac{AD}{QC}$. Då blir $AD = \phi$ och $QD = \phi - 1$. Från likformigheten 2.5 som vi räknade fram ovan får vi nu att

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}, \tag{2.6}$$

eller

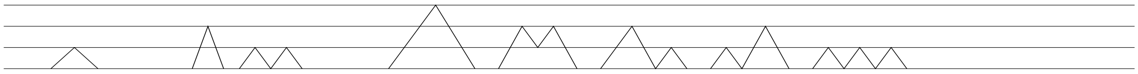
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \tag{2.7}$$

Observera att detta är samma ekvation som 2.2. Eftersom $\phi > 1$ så måste vi ha

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62. \tag{2.8}$$

Man kan alltså dela en sträcka med det gyllene snittet genom att rita ett pentagram på detta vis.

Catalantalen är en mindre känd talföljd, som också har en del intressanta egenskaper. Detta är talföljden $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$. Det är inte så lätt att lista ut nästa tal i denna följd. Det som är speciellt med Catalantalen (C_n) är att de, liksom Fibonaccitalen, återfinns i många olika sammanhang. Man kan definiera C_n som antalet bergskedjor som är konstruerade så att det finns n uppförsbackar och n nedförsbackar av en viss längdenhet. Då får man nämligen serien $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$, om man sätter $C_0 = C_1 = 1$ (se fig nedan).



Det visar sig att C_n också kan ses som antalet sätt man kan rita diagonaler i en konvex $(n+2)$-hörning utan att de korsar varandra. Exempelvis är en kvadrat en konvex 4-hörning. Vi får bara rita en diagonal i en kvadrat, ty de båda diagonalerna korsar varandra och får inte ritas ut samtidigt. Men detta kan göras på två sätt. Alltså är $C_4 = 2$, som önskat.

Ännu ett sätt att beräkna C_n är antalet sätt man kan sätta ut parenteser i en sekvens av $n+1$ st olika symboler $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n+1}$. Parenteserna ska sättas ut så att man kan tänka sig att man multiplicerar elementen i en viss bestämd ordning. Exempelvis är $(((x_1 x_2) x_3) x_4)$ ett sätt och $((x_1 (x_2 x_3)) x_4)$ ett annat.

Detta är bara några representationer av Catalantalen av alla de som finns. Det visar åter på hur en och samma talföljd kan komma in i många olika sammanhang. Formeln för den n:te Catalantalet är

$$C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!}, \tag{2.9}$$

där $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (utläses n-fakultet). Exempelvis är $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Det kan vara en rolig övning att visa att C_n verkligen blir heltal.

I nästa kapitel kommer vi gå in på summor av talföljder, något som också kan vara av praktiskt intresse. Låt oss ta ett exempel: Hur många stenar behövs för att bygga en 3-dimensionell pyramid? För enkelhets skull antar vi att överst ligger en sten, näst överst ligger tre stenar, näst näst överst 6 stenar osv. Under varje sten ligger alltså tre stenar. Hur många stenar behövs då för att bygga en pyramid som består av 10 lager sten? Svaret blir en summa av antal stenar i varje lager. Första problemet blir att hitta en formel för hur många stenar det ligger i n:te lagret, säg att det blir a_n. Därefter summeras dessa a_n för att få totala antalet stenar i hela den tiolagriga pyramiden:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}. \tag{2.10}$$

Alla har väl hört historien om Akilles och Sköldpaddan. Akilles och Sköldpaddan skall springa ikapp, en tävling som Akilles med sin överlägsna snabbhet tycker verkar patetisk (Akilles springer 10 gånger så fort som sköldpaddan). Sköldpaddan får därför 100 m försprång. Så går startskottet. När så Akilles sprungit 100 m har sköldpaddan hunnit 10 m, det är 10 m kvar till sköldpaddan. Efter att Akilles sprungit ytterligare 10 m har sköldpaddan hunnit 1 m. Nu har Akilles sprungit (100+10) m=110 m medan sköldpaddan inkl försprånget har hunnit (100+10+1) m=111 m, dvs

Akilles ligger 1 m bakom sköldpaddan. Nåväl, hinner Akilles någonsin upp sköldpaddan och i så fall var? Svaret på denna fråga bör läsaren kunna ge efter att ha läst resten av kompendiet.

Som synes kommer talföljder in på en mängd områden. Det är ett mycket viktigt element i matematiken och binder samman algebra, analys och geometri.

Fraktaler är ett område som har fått ett väldigt uppsving på 1900-talet mycket pga datorns tillkomst. Här behandlas s k funktionsiterationer. Detta innebär att man har en funktion f (t ex $f(x) = x^2 - 1/2$) i vilken vi stoppar in ett värde x. Vi får då $f(x)$. Sedan stoppar vi in $f(x)$ i f och får $f(f(x))$, osv. Låt oss införa beteckningen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, som utläses "f boll g" och $f(f(x)) = f^2(x)$. Mer generellt skriver vi

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n\ ggr}(x) = f^n(x). \tag{2.11}$$

Vad händer då n blir väldigt stort?

Också detta handlar om talföljder. Om vi sätter $a_n = f^n(x)$ får vi en talföljd som vi kan undersöka. Om a_n närmar sig något speciellt tal då n blir större och större säger vi att följden a_n konvergerar, i annat fall divergerar den. Notera också att följden a_n ges via rekursionsformeln

$$a_n = f(a_{n-1}). \tag{2.12}$$

Begreppen konvergens och divergens, som vi kommer att gå in på senare i kompendiet, är centrala i hela den matematiska analysen.

3. Summor

Om $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ är tal så inför vi notationen

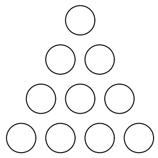
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Exempel 3.1.

$$\sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6 \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30.$$

Exempel 3.2. Hur många enkronor går det åt för att bygga en två-dimensionell pyramid av höjd 4 (se figur)?



Svar: $1 + 2 + 3 + 4$.

Låt oss generalisera problemet: hur många enkronor går det åt för att bygga en pyramid av höjd n, där n är ett godtyckligt positivt tal?

Svar: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$.

Hur kan man beräkna denna summa? Vi visar hur man gör detta i fallet $n = 8$, och så lämnas det som en övning att verifiera att metoden fungerar för vilket positivt heltal n som helst.

Låt

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

Vi kan också skriva detta som

$$S = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Utför vi följande addition

$$\begin{array}{r}
S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\
\underline{S = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \\
2S = \underbrace{9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9}_{8}
\end{array}$$

fås

$$2S = 8 \cdot 9 \iff S = \frac{8 \cdot 9}{2}.$$

Vi har alltså fått följande resultat:

Sats 3.3. För varje heltal $n \geqslant 1$ gäller

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Detta kallas för en *aritmetisk* summa.

Övning 3.4. *Visa att summan av de n första jämna talen är $n(n+1)$.*

Övning 3.5. *Visa att summan av de n första udda talen är n^2.*

Exempel 3.6. Du ska gå över en gata som är två meter bred.

Steg 1. Du går över halva gatan. Då har du gått

$$1 \text{ m}.$$

Steg 2. Du går över hälften av återstoden. Då har du sammanlagt gått

$$\left(1+\frac{1}{2}\right) \text{ m}.$$

Steg 3. Åter igen går du över hälften av återstoden och har då sammanlagt gått

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \text{ m}.$$

osv

Efter n steg har du gått (tänk igenom detta)

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ m} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} \text{ m}.$$

Innan vi beräknar denna summa studerar vi ett mer allmänt fall, nämligen summan

$$S = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1},$$

där x är ett godtyckligt tal. Fallet $x=1$ är trivialt, så i fortsättningen antar vi att $x \neq 1$. Det lämnas som en övning att verifiera att

$$(x-1)(\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^3+x^2+x+1}_{S}) = x^n - 1.$$

vilket ger att

$$(x-1)S = x^n - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad S = \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Går vi tillbaka till vår promenad (fallet $x=\frac{1}{2}$) fås att vi efter n steg gått

$$\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \text{ m}.$$

Resultatet från detta exempel är följande sats.

Sats 3.7. För varje tal $x \neq 1$ och för varje positivt heltal n så gäller att

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Denna summa kallas för en *geometrisk* summa.

Övning 3.8. *Eftersom vi förhoppningsvis kommer över gatan, vad borde*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

bli (vi tänker oss att vi går "oändligt" många steg).

Övning 3.9. *Visa att för varje tal $x \neq 1$ och för alla positiva heltal $m < n$ så är*

$$\sum_{k=m}^{n-1} x^k = \frac{x^m - x^n}{1-x}.$$

4. Talföljder

Exempel 4.1. Ett exempel på en talföljd är:

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

De tre punkterna efter det sista kommat betyder att mönstret upprepar sig utan slut. Den naturliga tolkningen är att man avser alla jämna tal i växande ordning.

Exempel 4.2. Ett annan talföljd är:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Varje tal är här hälften så stort som det närmast föregående talet, utom det första som är 1.

Exempel 4.3.

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

Varje tal är här lika med summan av de två närmast föregående talen, utom de två första som är 1. Vi känner igen denna talföljd från det inledande kapitlet — Fibonaccitalen.

Ovanstående är exempel på talföljder. En talföljd $a_n, n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, där a_n är reella tal, kan betraktas som en regel som till varje naturligt tal ordnar ett reellt tal.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

I Exempel 4.2 ovan har vi alltså $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{16}, \ldots$.

Man kan representera talföljder på två olika sätt:

1. Direkt representation
2. Rekursiv representation

Talföljden i Exempel 4.1 (de jämna talen) kan ges den direkta representationen $a_n = 2n + 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, men även en rekursiv representation genom $a_{n+1} = a_n + 2, a_0 = 2, n = 0, 1, 2, \ldots$ När man ger en direkt representation talar man alltså om vilken regeln är som styr hur talen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ska se ut. När man ger en rekursiv representation talar man om hur nästa tal i talföljden beräknas uttryckt i ett antal av de föregående talen. Man måste dessutom ange initialvärden för tillräckligt många tal så att rekursionen är väldefinierad.

Om vi tittar närmare på Fibonacci-följden (Exempel 4.3) så ser vi att en rekursiv representation är:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$a_1 = 1, a_2 = 1.$$

Det behövs 2 initialvärden ty rekursionen är definierad genom att nästa tal beräknas med hjälp av de 2 föregående. Den direkta representationen blir här relativt komplicerad men man kan visa att den är[2]:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), n = 1, 2, 3, \ldots$$

Övning 4.4. *Kontrollera att formeln ger rätt svar för de 5 första talen i Fibonacci-följden.*

Man brukar använda skrivsättet $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ för att beteckna talföljden $a_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, där symbolen ∞ inte ska tolkas som ett tal utan som ett uttryck för att n inte antar något största värde, så talföljden har inget slut.

Definition 4.5.

i) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, sådan att det existerar ett reellt tal L och $a_n \geqslant L$ för varje n kallas *nedåt begränsad*, och talet L kallas *nedre begränsning.*

ii) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, sådan att det existerar ett reellt tal L och $a_n \leqslant L$ för varje n kallas *uppåt begränsad*, och talet L kallas *övre begränsning.*

[2] Detta blir faktiskt ett heltal för varje n.

iii) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är *begränsad* om den är både nedåt och uppåt begränsad.
iv) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kallas *positiv* om den är nedåt begränsad av 0, dvs $a_n \geqslant 0$ för varje n.
v) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kallas *negativ* om den är uppåt begränsad av 0, dvs $a_n \leqslant 0$ för varje n.
vi) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_{n+1} \geqslant a_n$ för varje n kallas *växande*.
vii) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_{n+1} \leqslant a_n$ för varje n kallas *avtagande*.
viii) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kallas *monoton* om den är antingen växande eller avtagande.
ix) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sådan att $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ för alla n, kallas *alternerande*, ty a_n och a_{n+1} har olika tecken.

Observera att med ovanstående definition blir talföljden $0, 0, 0, 0, \ldots$ både positiv och negativ.

Exempel 4.6. Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ där $a_n = n$ är nedåt begränsad, eftersom alla tal a_n är större än eller lika med 0.

Exempel 4.7. Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = 2 + (-1)^n$ är begränsad.

Övning 4.8. *Ge ett exempel på en negativ talföjd.*

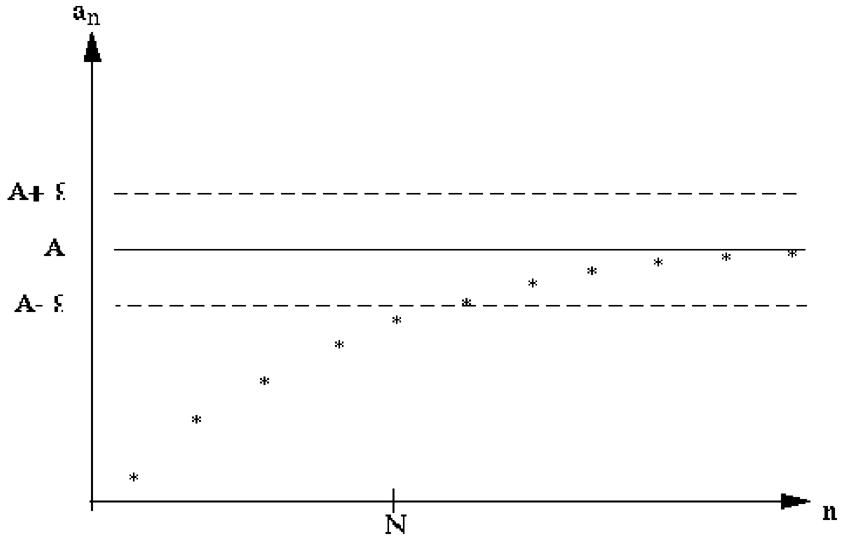
Övning 4.9. *Ge ett exempel på en avtagande talföljd.*

Exempel 4.10. Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ där $a_n = (-1)^n$. Talen a_n växlar här mellan 1 och -1, så $a_n \cdot a_{n+1} = -1 < 0$ för alla n. Talföljden är därför alternerande.

5. Konvergens

Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Man är ofta intresserad av vilka värden a_n antar då n är mycket stort. Man har därför infört ett begrepp kallat *gränsvärde*. Idén är att om talen a_n i talföljden närmar sig ett ändligt tal A och kommer hur nära som helst om man väljer n tillräckligt stort, så säger man att talföljden har *gränsvärdet* A. Låt oss uttrycka detta matematiskt.

Definition 5.1. Om det existerar ett reellt tal A sådant att det för varje positivt tal ε gäller att $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ för alla n större än något tillräckligt stort positivt heltal N, säger man att talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ har *gränsvärdet* A, och detta betecknas $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$.



Figur 1. Grafisk illustration av Definition 5.1

Man har med det positiva talet N, och villkoret att $n > N$, bara för att uttrycka att a_n närmar sig A hela tiden om n är tillräckligt stort. Utan detta villkor skulle man kunna tänka sig att a_n ligger nära A för vissa stora n, men kanske inte för deras efterföljare. Den formella definitionen kan tyckas vara väl komplicerad men exemplen framöver kommer förhoppningsvis att göra det hela mer begripligt.

Exempel 5.2. Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = \frac{1}{n+1}$. Man inser att om n är stort blir a_n litet, så det verkar som om talföljden borde konvergera mot 0. Låt oss försöka visa detta. Vi vill alltså visa att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dvs att om vi väljer N tillräckligt stort, kan vi få a_n, där $n > N$, att bli hur nära 0 som vi vill. Antag att vi tar ett positivt tal som vi kallar ε och frågar oss hur stort N måste vara för att olikheten $-\varepsilon < a_n - 0 < \varepsilon$ ska vara uppfylld då $n > N$. Det gäller att

$$a_N = \frac{1}{N+1} > \frac{1}{n+1} = a_n > 0, \quad \text{för alla} \quad n > N \tag{5.1}$$

ty följden är avtagande och positiv. Det räcker därför att visa att vi kan välja N så att $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Vi har

$$\begin{gathered} \frac{1}{N+1} < \varepsilon \iff \\ 1 < \varepsilon(N+1) \iff \\ 1 < \varepsilon N + \varepsilon \iff \\ 1 - \varepsilon < \varepsilon N \iff \\ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < N \end{gathered}$$

Detta visar att om vi väljer N till ett heltal större än $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ så blir $-\varepsilon < a_N = \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Då följer genom ekvation (5.1) ovan att olikheten $-\varepsilon < a_n - 0 < \varepsilon$ är uppfylld för alla $n > N$. Eftersom ε var godtyckligt, dvs det kan vara vilket positivt tal som helst, oavsett hur litet, så följer att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ enligt definition 5.1.

Exempel 5.3. Betrakta talföljden $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $b_n = \frac{1}{n^2+1} + 2$. Vi vill visa att $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$. Vi låter ε vara ett godtyckligt positivt tal[3], och ska visa att vi kan välja N så att $-\varepsilon < b_n - 2 < \varepsilon$ för alla $n > N$. Eftersom $b_n = \frac{1}{n^2+1} + 2$ så gäller att

$$b_N - 2 > b_n - 2 > 0, \quad \text{för alla} \quad n > N \tag{5.2}$$

ty följden $\{b_n - 2\}_{n=0}^{\infty}$ är avtagande och positiv. Det räcker därför att hitta N så att $b_N - 2 = \frac{1}{N^2+1} < \varepsilon$; alltså:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2+1} &< \varepsilon \iff \\
1 &< \varepsilon(N^2+1) \iff \\
\frac{1}{\varepsilon} &< N^2 + 1 \iff \\
\frac{1}{\varepsilon} - 1 &< N^2 \iff \\
\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} &< N \quad (N > 0)
\end{aligned}$$

Vi väljer heltalet $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ vilket ger att $-\varepsilon < b_N - 2 < \varepsilon$. Då följer genom ekvation (5.2) ovan att olikheten $-\varepsilon < b_n - 2 < \varepsilon$ är uppfylld för alla $n > N$. Detta visar att $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$.

Exempel 5.4. Betrakta talföljden $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $c_n = 1$ för varje n. Vi vill visa att $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. Vi tar vårt godtyckliga $\varepsilon > 0$. Eftersom $c_n - 1 = 1 - 1 = 0$ för varje n följer att $-\varepsilon < c_n - 1 < \varepsilon$ för varje n, vilket visar att $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.

Exempel 5.5. Fibonacci-följden som nu är bekant (Exempel 4.3) saknar gränsvärde men följden av kvoter mellan på varandra följande tal konvergerar. Följden $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ har egenskapen att $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — det gyllene snittet.

Dessa fyra exempel illustrerar talföljder som har gränsvärden. Sådana talföljder kallas *konvergenta*, eftersom talen i följden konvergerar mot ett ändligt tal. Talföljder som saknar gränsvärden kallas *divergenta*.

Exempel 5.6. Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = n$. Talen a_n växer här utan gräns och talföljden är därför divergent.

Övning 5.7. *Visa att talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = \frac{1}{n^3+1}$, är konvergent. Vilket är dess gränsvärde?*

Om talen a_n i talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ växer utan gräns får man det som kallas oegentliga gränsvärden.

Definition 5.8. Givet en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Om det för varje reellt tal $M > 0$ existerar ett heltal N sådant att $a_n > M$ om $n > N$ sägs talföljden ha det *oegentliga gränsvärdet* ∞, vilket betecknas $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definition 5.9. Givet en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Om det för varje reellt tal $M > 0$ existerar ett heltal N sådant att $a_n < -M$ om $n > N$ sägs talföljden ha det *oegentliga gränsvärdet* $-\infty$, vilket betecknas $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Exempel 5.10. Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $a_n = 2n^2$ divergerar och har det oegentliga gränsvärdet ∞, dvs $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Övning 5.11. *Hitta en talföljd med det oegentliga gränsvärdet $-\infty$.*

Sats 5.12. Varje uppåt begränsad, växande talföljd är konvergent.

Bevis. Låt $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ beteckna vår talföljd. Eftersom följden är uppåt begränsad existerar en övre begränsning som vi kallar C. Då finns ett minsta tal[4] $S \leqslant C$ som uppfyller villkoret

$$a_n \leqslant S \text{ för alla } n \geqslant 0 \tag{5.3}$$

[3]Av tekniska skäl tar vi $\varepsilon < 1$.

[4]Detta kan tyckas självklart, men talets existens beror på något som kallas fullständigheten hos de reella talen, vilket inte är trivialt.

Detta betyder att om talet $S^* < S$ så finns ett $N \geqslant 0$ sådant att $a_N > S^*$.

Om $\varepsilon > 0$ är ett godtyckligt tal så finns på grund av valet av S ett N sådant att $a_N > S - \varepsilon$, och eftersom följden är växande så gäller att $a_N \leqslant a_{N+1} \leqslant a_{N+2} \leqslant \ldots$ Det följer att

$$a_n > S - \varepsilon \text{ för alla } n \geqslant N. \tag{5.4}$$

Kombinerar vi nu (5.3) och (5.4) får vi att

$$S - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant S \text{ för alla } n \geqslant N.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtycklig så betyder detta precis att

$$\lim_{n \to \infty} a_n = S.$$

$\square$

6. Induktion

Vi har tidigare sett exempel på hur man kan beskriva en talföljd dels genom en rekursiv formel, tex

$$a_n = a_{n-1} + 2, \quad n \geqslant 1, \tag{6.1}$$

$$a_0 = 2, \tag{6.2}$$

dels genom en direkt formel, tex

$$a_n = 2n + 2, \quad n \geqslant 0. \tag{6.3}$$

I det här fallet beskriver båda formlerna samma talföljd, de jämna talen. Hur kan vi veta det? För att visa det kommer vi att använda en teknik som kallas induktion. Den visas bäst med ett exempel.

Vi ska alltså visa att talföljden som ges av (6.3) är samma talföljd som den som ges av (6.1) och (6.2). Det gör vi i två steg. Först ser vi till att de båda talföljderna börjar likadant. Detta görs genom att jämföra (6.2) och (6.3). Därefter kollar vi att avståndet mellan talen i talföljderna är samma, vilket görs genom att jämföra (6.1) och (6.3). Det första steget kallas basfall (vi kollar då på det första elementet, basen), och det andra kallas induktionssteg.

Basfall: Genom att sätta $n = 0$ i (6.3) visar vi att (6.3) stämmer överens med (6.2): $a_0 = 2 \cdot 0 + 2 = 2$.

Induktionssteg: (6.1) relaterar varje element i talföljden med det efterföljande. Vi vill nu visa att om den direkta formeln stämmer överens med ett element, så stämmer den också för nästa element. Vi antar därför att formeln stämmer för $n = p - 1$, dvs att

$$a_{p-1} = 2(p-1) + 2.$$

Det vi vill visa är att formeln stämmer för $n = p$, dvs att

$$a_p = 2p + 2.$$

Vi får nu bara använda rekursionen (6.1) samt vårt antagande. Vi har

$$a_p = a_{p-1} + 2 = \{\text{här använder vi antagandet}\} = 2(p-1) + 2 + 2 = 2p + 2.$$

Den direkta formeln stämmer alltså för $n = p$ om den stämmer för $n = p - 1$.

Från första steget ser vi att (6.3) stämmer för $n = 0$. Induktionssteget visar att den då stämmer för $n = 1$. Vi kan då återigen använda induktionssteget för att visa att den stämmer för $n = 2$, och sedan $n = 3$ osv. Formeln stämmer alltså för alla värden på n som är större än, eller lika med, 0.

Övning 6.1. *Låt talföljden* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definieras genom*

$$a_1 = 1, \; a_n = 2a_{n-1} + 1.$$

Visa att $a_n = 2^n - 1$. *(Skriv ut de första talen i talföljden, så att du förstår hur formlerna fungerar. Då blir det lättare att lösa uppgiften.)*

Övning 6.2. *Låt talföljden* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definieras genom*

$$a_1 = 1, \; a_n = a_{n-1} + n.$$

Visa att $a_n = \frac{(n+1)n}{2}$ *(detta är antalet kulor i lager* n *i den 3-dimensionella pyramiden).*

Övning 6.3. *Låt talföljden* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definieras genom*

$$a_1 = 3, \; a_2 = 5, \; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Visa att $a_n = 2^n + 1$.

Ledning*: Eftersom rekursionen går två steg bakåt behöver vi kontrollera både* a_1 *och* a_2 *i basfallet. I induktionssteget får vi dessutom anta att formeln stämmer både för* $n = p - 2$ *och* $n = p - 1$.

Övning 6.4. *Visa att den direkta formeln för Fibonaccitalen stämmer. Vi minns från tidigare avsnitt att*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

samt att den rekursiva formuleringen var

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 3,$$
$$F_1 = F_2 = 1.$$

Ledning*: För att förenkla beräkningarna kan vi sätta $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tänk sedan på vilken andragradsekvation som α och β är lösningar till.*

Övning 6.5. *Visa att kvoten mellan två på varandra följande Fibonnaci-tal går mot det gyllene snittet, dvs att*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ledning*: Vi vet att*

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}},$$

där α och β är som i föregående övning. Vad går β^n mot (vi vet att $-1 < \beta < 1$)?

Induktionstekniken kan även användas för att verifiera en summas värde. Detta inses enklast genom att betrakta summan som en talföljd. Betrakta summan

$$2 + 6 + 16 + 40 + \ldots + (n+1)\ 2^{n-1} \ = \sum_{k=1}^{n} (k+1)\ 2^{k-1} = n\ 2^n. \tag{6.4}$$

Den sista likheten är den vi vill visa. Låt oss nu kalla denna summa a_n (summan beror av antalet termer, n). Genom att skriva den sista termen i summan separat får vi

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\ 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\ 2^{k-1} \ + (n+1)\ 2^{n-1}$$

och vi ser att rekursionen blir

$$a_n = a_{n-1} + (n+1)\ 2^{n-1}$$
$$a_1 = 2.$$

Vi ska nu använda detta för att visa den sista likheten i (6.4).

Basfall: Vi sätter in $n = 1$ i sista termen i (6.4) (den direkta formeln): $a_1 = 1 \cdot 2^1 = 2$. Detta stämmer med rekursionens initialvärde.

Induktionssteg: Vi antar att formeln stämmer för $n = p - 1$, dvs att

$$a_{p-1} = (p-1)\ 2^{p-1}.$$

Vi vill visa att den stämmer för $n = p$, dvs att

$$a_p = p\ 2^p.$$

Med hjälp av rekursionen och antagandet får vi

$$a_p = a_{p-1} + (p+1)\ 2^{p-1} = \{\text{antagandet}\} \ = \ (p-1)\ 2^{p-1} + (p+1)\ 2^{p-1}$$
$$= (p - 1 + p + 1)\ 2^{p-1} = 2\ p\ 2^{p-1} = p\ 2^p.$$

Rekursionen stämmer således med formeln.

Eftersom både basfall och induktionssteg fungerade gäller likheten.

Exempel 6.6. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Lösning: Vi använder induktion. Vi väljer här att formulera oss litet annorlunda. Se till att du förstår varför detta sätt egentligen är likadant som det ovan.

Basfall: Sätt in $n = 1$ på båda sidor. Vi får VL $= 1^2 = 1$ och HL $= (2+3+1)/6 = 1$.
Induktionssteg: Antag att likheten gäller för $n = p-1$, dvs
$$\sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \frac{2(p-1)^3+3(p-1)^2+(p-1)}{6}.$$
Vi vill nu visa att den gäller för $n = p$, dvs
$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{2p^3+3p^2+p}{6}.$$
Med hjälp av antagandet får vi
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} k^2 = \{\text{bryt ut sista termen}\} &= \sum_{k=1}^{p-1} k^2 + p^2 = \{\text{antagandet}\}\\ &= \frac{2(p-1)^3+3(p-1)^2+(p-1)}{6} + p^2\\ &= \frac{2(p^3-3p^2+3p-1)+3(p^2-2p+1)+p-1+6p^2}{6}\\ &= \frac{2p^3+(-6+3+6)p^2+(6-6+1)p+(-2+3-1)}{6}\\ &= \frac{2p^3+3p^2+p}{6}.\end{aligned}$$

Såväl basfall som induktionssteg stämmer. Alltså gäller formeln.

Övning 6.7. *Visa formeln för aritmetisk summa,*
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$
med hjälp av induktion.

Övning 6.8. *Visa formeln för geometrisk summa,*
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$
med hjälp av induktion.

Övning 6.9. *Visa att antalet stenar i en 3-dimensionell pyramid av höjd n ges av*
$$a_n = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{6}.$$
Som du säkert minns är det $\frac{(k+1)k}{2}$ stenar i lager k.

Induktionstekniken är inte begränsad till talföljder och summor. Vi kan även använda den för att visa olikheter.

Exempel 6.10. Visa att $3^n > n^3$ för $n \geqslant 4$.

Basfall: Basfallet är här $n = 4$, eftersom 4 är det minsta värde formeln ska visas för. Vi har VL $= 3^4 = 81$ och HL $= 4^3 = 64$. Eftersom $81 > 64$ gäller formeln i basfallet.

Induktionssteg: Vi antar att formeln stämmer för $n = p-1, p \geqslant 5$, dvs att $3^{p-1} > (p-1)^3$. Vi vill visa att formeln gäller för $n = p$, dvs $3^p > p^3$. Vi får bara utnyttja antagandet. Vi får således

$$
\begin{aligned}
3^p &= 3 \cdot 3^{p-1} > \{antagandet\} > 3(p-1)^3 = 3(p^3 - 3p^2 + 3p - 1) \\
&= 3p^3 - 9p^2 + 9p - 3 > \{9p - 3 > 0\} > 3p^3 - 9p^2 \\
&= p^3 + 2p^3 - 9p^2 = p^3 + p^2(2p-9) > \{2p > 9\} > p^3.
\end{aligned}
$$

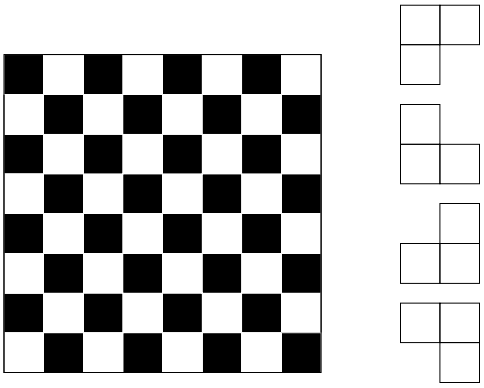
Eftersom både basfall och induktionssteg stämmer gäller formeln.

Övning 6.11. *Visa att $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ är delbart med 9 för alla $n \geqslant 1$.*

Ledning*: Att visa att något är delbart med 9 är samma sak som att visa att det kan skrivas $9 \cdot m$, för något heltal m. Antagandet i induktionssteget blir alltså att påståendet gäller för $n = p-1$, dvs att $(p-2)^3 + (p-1)^3 + p^3 = 9 \cdot m$ och för att visa att det fungerar för $n = p$ räcker det med att lösa ut 9 från $(p-1)^3 + p^3 + (p+1)^3$ (glöm inte att använda antagandet).*

Man kan även använda induktionsprincipen till helt andra problem.

Exempel 6.12. Antag att man har ett (kvadratiskt) schackbräde med sidlängd $2^n, n \geqslant 1$. Välj ut en godtycklig ruta på detta bräde. Visa att man kan täcka återstående rutor på brädet med hjälp av vinklar enligt figuren.



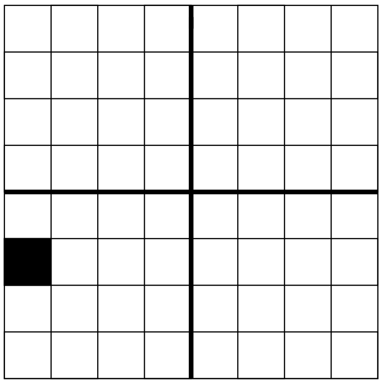
Lösning:

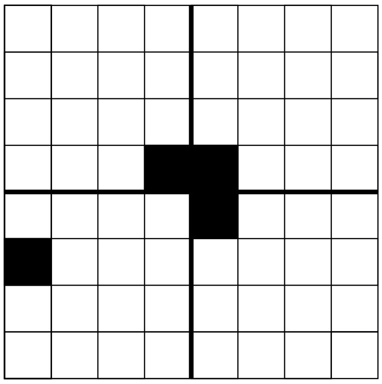
Basfall: $n = 1$. Vi ska då visa att ett bräde med sidlängd 2 kan täckas med vinklar om vi väljer bort en ruta på brädet. Detta är enkelt, eftersom återstående rutor har samma form som en vinkel, oavsett vilken ruta vi väljer att ta bort.

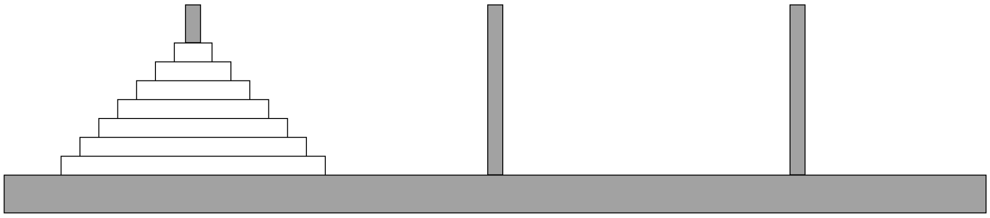
Induktionssteg: Vi antar att påståendet gäller för $n = p-1$, dvs att varje bräde med sidlängd 2^{p-1} kan täckas med vinklar, bortsett från en i förväg vald ruta. Vi ska visa att vi kan täcka varje bräde med sidlängd 2^p med vinklar, bortsett från en i förväg vald ruta. För att visualisera processen kommer vi att visa bilder i fallet $p = 3$, men resonemanget gäller för allmänt p.

Vi börjar med att välja den ruta som inte ska täckas, tex rutan a3. Sedan delar vi in brädet i fyra lika stora, kvadratiska delar. Dessa har alla sidlängd 2^{p-1}, så enligt induktionsantagandet kan vi täcka dessa, bortsett från en ruta. I den fjärdedel där vår utvalda ruta finns täcker vi resten av rutorna. I de andra fjärdedelarna täcker vi alla rutor utom den som ligger närmast brädets mitt. Då återstår bara tre rutor i mitten, vilka kan täckas över med lämplig vinkel. Alltså är hela brädet täckt.

Övning 6.13. *Tornen i Hanoi är ett spel med tre pinnar och n brickor i olika storlekar. Brickorna ligger trädda på en av pinnnarna. Ingen bricka får någonsin ligga under en större bricka. Målet är att flytta brickorna, en i taget, så att alla brickorna slutligen ligger på en annan pinne. Visa att det alltid går att göra (tips: använd induktion). Hur många drag krävs? Kom på rätt formel och visa även den med induktion.*







Det finns flera intressanta sidor på internet som beskriver och tom illustrerar fenomenet. Se tex

- *http://mathworld.wolfram.com/TowersofHanoi.html*
- *http://www.ima.mdh.se/personal/htg/hanoi/hanoi.htm*
- *http://www.cut-the-knot.com/recurrence/hanoi.html*
- *http://www.pangea.ca/kolar/javascript/Hanoi/Hanoi.html*

7. Serier

Vi har i avsnittet om summor resonerat oss fram till att vi borde ha

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2.$$

Låt oss nu vara rigorösa. Antag att vi har en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ och vill undersöka

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots,$$

vilket vi också skriver

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{7.1}$$

Uttrycket (7.1) kallar vi för en *serie*. Vi ska nu se om detta uttryck kan ges någon mening. Vi börjar med att definiera följden $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ genom

$$S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Talen S_N kallas för seriens *partialsummor*. Om

$$\lim_{N\to\infty} S_N=S,$$

där S är ett reellt tal, säger vi att serien (7.1) är *konvergent* och har *summan* S, och vi skriver

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=S.$$

Annars säger vi att serien är *divergent*.

Exempel 7.1. För vilka tal x konvergerar serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\ ?$$

För att undersöka detta studerar vi följden $\{S_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ av partialsummor, dvs

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} x^n.$$

Vi vet från avsnittet om summor att

$$\sum_{n=0}^{N} x^n=\frac{1-x^{N+1}}{1-x},\ x\neq 1.$$

Vi kommer att få följande fall:

($i.$) $|x|<1$. Då gäller att $\lim_{N\to\infty} x^{N+1}=0$, vilket ger att

$$S=\lim_{N\to\infty} S_N(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-x^{N+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

($ii.$) $|x|\geqslant 1$. Då är inte partialsummorna konvergenta.

(Det lämnas som en övning att visa detta). Alltså,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x} \text{ om } |x|<1.$$

Notera att vi för $x=\frac{1}{2}$ får

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2.$$

□

Övning 7.2. *Visa att*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ledning. Observera att $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Vi såg i exemplet ovan att om $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ är konvergent så måste $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Gäller detta alltid, dvs måste termerna i en konvergent serie gå mot noll? Följande sats ger svaret.

Sats 7.3. Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent så gäller att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bevis. Om vi låter

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$

ser vi att

$$a_{N+1} = S_{N+1} - S_N. \tag{7.2}$$

Eftersom vi har antagit att serien är konvergent finns det ett reellt tal S sådant att $S = \lim_{N\to\infty} S_N$. Vi noterar att

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N+1}$$

(tänk igenom detta). Tillsammans med (7.2) ger detta att

$$\lim_{n\to\infty} a_{N+1} = \lim_{N\to\infty}(S_{N+1} - S_N) = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} - \lim_{N\to\infty} S_N = S - S = 0$$

□

Övning 7.4. *Tänk igenom att ovanstående sats ger att om inte* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *så är serien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Nu kan man fråga sig, gäller omvändningen, dvs om följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uppfyller $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, är då serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent? Följande exempel visar att detta inte behöver vara sant.

Exempel 7.5. Låt oss studera serien[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Det är klart att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

så termerna går mot noll. Låt

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Om vi kan visa att $S_{2^k} \geqslant 1 + \frac{k}{2}$ för alla heltal $k \geqslant 0$ så kan inte serien vara konvergent (tänk igenom detta). Vi ska visa detta med hjälp av induktion.

Basfall:

$$S_{2^0} = S_1 = 1.$$

Induktionssteg: Antag att $S_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2}$ för något $p \geqslant 0$. Då

$$\begin{aligned} S_{2^{p+1}} =& S_{2^p} + \underbrace{\frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + \frac{1}{2^p+3} + \ldots + \frac{1}{2^p+2^p-1} + \frac{1}{2^p+2^p}}_{2^p \text{ termer som alla är} \geqslant \frac{1}{2^p+2^p} = \frac{1}{2^{p+1}}} \\ \geqslant& S_{2^p} + \frac{2^p}{2^{p+1}} \geqslant 1 + \frac{p}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{p+1}{2}. \end{aligned}$$

[5]Denna serie kallas för den *harmoniska* serien.

I sista olikheten använde vi induktionsantagandet $S_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2}$. Vi har alltså visat att

$$S_{2^k} \geqslant 1 + \frac{k}{2} \text{ för alla heltal } k \geqslant 0, \tag{7.3}$$

vilket ger att serien är divergent.

Man kan på helt analogt sätt visa att

$$S_{2^k} \leqslant 1 + k \text{ för alla heltal } k \geqslant 0. \tag{7.4}$$

(Det lämnas som en övning att visa detta).

Låt oss avsluta exemplet med följande fråga: hur många termer behövs för att summan ska bli ungefär 100? Från (7.3) fås att $S_{2^{99}} \leqslant 100$, så det behövs minst 2^{99} termer, och från (7.4) fås att $S_{2^{198}} \geqslant 100$, så det behövs högst 2^{198} termer. Observera att $2^{99} = 633825300114114700748351602688$, så det behövs väldigt många termer[6].

Övning 7.6. *Är serien*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1000n}$$

konvergent?

I allmänhet är det väldigt svårt att beräkna en serie[7], så man får oftast nöja sig med att undersöka om serien är konvergent eller ej. Hur kan man då avgöra om en serie är konvergent eller inte? Ovan såg vi en metod. Vi ska nu visa ytterligare några metoder. Vi kommer främst behandla fallet då alla termer i serien är icke-negativa. I detta fall är följden av partialsummor växande vilket underlättar analysen av serien. Vi har följande.

Sats 7.7. Antag att följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är sådan att $a_n \geqslant 0$ för alla $n \geqslant 0$. Låt $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ ges av

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Då gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ är konvergent} \iff \text{det finns en konstant } C \text{ så att } S_N \leqslant C \text{ för alla } N \geqslant 0.$$

Bevis. Först antar vi att det finns en konstant C så att $S_N \leqslant C$ för alla $N \geqslant 0$. Eftersom alla a_n är icke-negativa så är $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ en växande följd, dvs

$$S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant C.$$

Alltså, vi har en uppåt begränsad växande följd $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$. Sats 5.12 säger att denna följd måste vara konvergent, dvs det existerar ett reellt tal S så att

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

Detta visar ($\Leftarrow$).

Nu antar vi att $\lim_{N\to\infty} S_N = S$, där S är ett reellt tal. Då finns ett tal N_0 sådant att

$$S - 1 \leqslant S_N \leqslant S + 1 \text{ för alla } N \geqslant N_0$$

(på grund av definitionen av gränsvärde). Låt nu C vara det största talet av de ändligt många talen $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{N_0-1}, S+1$. Då är

$$S_N \leqslant C \text{ för alla } N \geqslant 0.$$

[6]Man kan visa att

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N \right) = C,$$

där C är en konstant som approximativt är 0.5772. Talet C kallas för *Eulers* konstant. Det är ett olöst problem om detta tal är rationellt (dvs talet går att skriva på formen $\frac{p}{q}$, där p och q är heltal) eller irrationellt (dvs inte rationellt). $\sqrt{2}$ är ett exempel på ett irrationellt tal.

[7]Man kan visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, men om den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ kan uttryckas på något liknande sätt är okänt.

Detta visar ($\Rightarrow$).

$\square$

Observera att konstanten C i ovanstående sats måste vara oberoende av N. Följande övning visar att satsen inte går att tillämpa på vilken serie som helst.

Övning 7.8. *Visa att serien*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

är divergent men att partialsummorna är begränsade uppåt av 1.

Ibland kan man avgöra om en serie är konvergent eller ej genom att jämföra serien med en annan, känd, serie. Vi har följande

Sats 7.9. Om $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ är två icke-negativa följder, dvs $a_n \geqslant 0$ och $b_n \geqslant 0$ för alla $n \geqslant 0$, som uppfyller villkoret att $a_n \leqslant b_n$ för alla n, så gäller att

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

och

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergent.}$$

Bevis. i). Låt

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$$

och

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Eftersom vi har antagit att $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ är konvergent så finns enligt sats 7.7 en konstant C sådan att $S_N \leqslant C$ för alla $N \geqslant 0$. Vidare vet vi att $a_n \leqslant b_n$ för alla $n \geqslant 0$ vilket ger att

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} b_n = S_N \leqslant C \text{ för alla } N \geqslant 0.$$

Sats 7.7 ger nu att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent. Detta visar i).

ii). Nu antar vi att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är divergent. Om $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ vore konvergent skulle i) ge att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent. Motsägelse.

$\square$

Exempel 7.10. Låt oss se om serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)^n$$

är konvergent. Eftersom

$$0 \leqslant \frac{1}{3(n+1)} \leqslant \frac{1}{3} \text{ för alla } n \geqslant 0$$

så är

$$0 \leqslant \left(\frac{1}{3(n+1)}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ för alla } n \geqslant 0.$$

Vi vet att $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ är konvergent, så resultatet följer från sats.

$\square$

Övning 7.11. *Visa att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$$

är divergent.

Övning 7.12. *Visa att för varje icke-negativt heltal k gäller att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \iff \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Vi kan faktiskt förbättra sats 7.9. Vi får då följande resultat:

Sats 7.13. Om $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en följd och $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en icke-negativa följd som uppfyller villkoret att $|a_n| \leqslant b_n$ för alla n, så gäller att

$$i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

och

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergent.}$$

Bevis. i) Vi börjar med att definiera två nya talföljder $\{a_n^+\}_{n=0}^{\infty}$ och $\{a_n^-\}_{n=0}^{\infty}$ genom

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{om } a_n \geqslant 0 \\ 0, & \text{om } a_n < 0 \end{cases}$$

och

$$a_n^- = \begin{cases} 0, & \text{om } a_n \geqslant 0 \\ -a_n, & \text{om } a_n < 0 \end{cases}$$

Båda dessa följder är icke-negativa och $0 \leqslant a_n^+ \leqslant b_n, 0 \leqslant a_n^- \leqslant b_n$ och $a_n = a_n^+ - a_n^-$ för alla $n \geqslant 0$. Från sats 7.9 följer nu att att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ och $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ är konvergenta, dvs det finns konstanter C och D så att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = C$ och $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = D$. Eftersom

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n^+ - \sum_{n=0}^{N} a_n^-$$

(ty $a_n = a_n^+ - a_n^-$ för alla $n \geqslant 0$) så får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n^+ - \sum_{n=0}^{N} a_n^- \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n^+ - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n^- = C - D.$$

Detta visar i). Beviset av ii) är samma som i sats 7.9.

□

Övning 7.14. *Visa att*[8]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

[8] Omvändningen gäller ej. Man kan visa att $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots = \ln 2$, men vi har visat att den harmoniska serien $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$ är divergent.

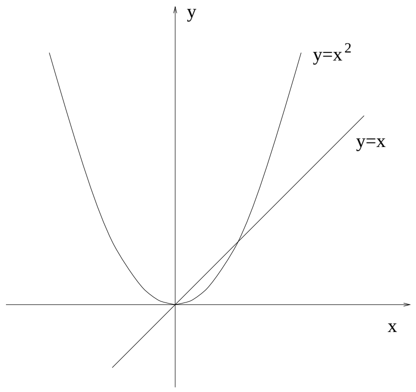
8. Stabilitet och attraktorer

Vi skall i detta avsnitt undersöka vad som händer om man itererar funktioner. Man tar en funktion $f = f(x)$ och stoppar in något tal x. Vi får då $f(x)$. Sedan kan vi åter stoppa in $f(x)$ i f, då får vi $f(f(x))$, osv. Låt oss införa beteckningen $f(f(x)) = f^2(x)$, och mer generellt

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n\ ggr}(x) = f^n(x). \tag{8.1}$$

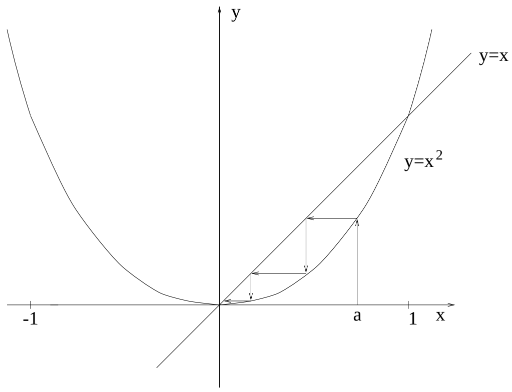
Vi säger att $f^n(x)$ är det n:te iteratet av x under f. Vidare, om $y = f(x)$ så säger vi att x avbildas på y under f. Vi skall nu mera i detalj undersöka vad som kan hända när vi itererar en funktion f.

Låt oss börja med ett enkelt exempel, $f(x) = x^2$. Grafen till f, som är bra att ha i sådana här sammanhang, ser ni nedan.



Till att börja med kan man fråga sig om det finns punkter som avbildas på sig själva, dvs punkter[9] a sådana att $f(a) = a$. Sådana punkter kallas fixpunkter. I figuren ser man att fixpunkterna är precis de a där funktionsgrafen skär linjen $y = x$. Vi slår fast att i vårt exempel så är $a = 0$ och $a = 1$ fixpunkter. Vår uppgift är nu att avgöra om $f^n(a)$ närmar sig något då n blir större och större och a är ett tal skilt från 0 och 1. Låt oss ta $a = 1/2$ till en början. Först får vi $f^1(1/2) = f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$. Vidare $f^2(1/2) = f(f(1/2)) = f(1/4) = (1/4)^2 = 1/16$. Det är lätt att sluta sig till att $f^n(1/2) = (1/2)^n = 1/(2^n)$. När n blir stort ser vi alltså att $f^n(1/2)$ närmar sig 0.

Om vi nu mer generellt antar att $0 < a < 1$, vad händer med $f^n(a)$? Uppenbarligen gäller ju att $f^2(a) = (a^2)^2 = a^4 < a^2 = f^1(a)$. Vi kan sluta oss till att $f^n(a) = a^{2^n}$ som närmar sig 0 då n blir större och större. Grafiskt kan man åskådliggöra iterationerna enligt nedanstående figur.



Observera att $f(-a) = (-a)^2 = a^2 = f(a)$. Om det gäller att $f(a) = f(-a)$ så säger man att f är en jämn funktion. Alltså kan vi "spegla" vårt resonemang och slå fast att om $0 < -a < 1$, dvs

[9] Vi använder nu variabeln a istället för x för att vara tydligare i figurerna.

$-1 < a < 0$ så gäller också att $f^n(a)$ går mot 0 då n går mot oändligheten. Vi skriver $f^n(a) \to 0$ då $n \to \infty$.

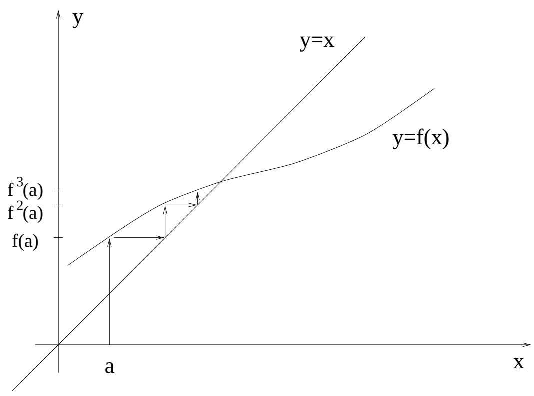
Låt oss nu istället anta att $a > 1$. Enligt ett liknande resonemang gäller då att $f^2(a) = (a^2)^2 = a^4 > a^2 = f^1(a)$. Eftersom $f^n(a) = a^{2^n}$ gäller att $f^n(a)$ växer obegränsat då n går mot oändligheten. Vi skriver $f^n(a) \to \infty$ då $n \to \infty$.

Vi kan se att fixpunkterna till f, dvs punkterna 0 och 1 spelar en stor roll här. Om vi startar i intervallet $-1 < a < 1$ gäller enligt ovan att $f^n(a) \to 0$ då $n \to \infty$, och om $|a| > 1$ (verifiera detta!) så gäller att $f^n(a) \to \infty$ då $n \to \infty$. Uppenbarligen spelar ingen roll hur nära 1 vi startar, vi kommer i vilket fall att avlägsna oss från 1 när vi itererar f. En fixpunkt med denna egenskap kallas *repellerande*. Fixpunkten 0 drar till sig punkter om vi startar tillräckligt nära 0 och kallas därför *attraherande*. Intervallet $-1 < a < 1$ inom vilket $f^n(a) \to 0$ kallas *attraktionsområdet* till fixpunkten 0.

För er som kan derivator:

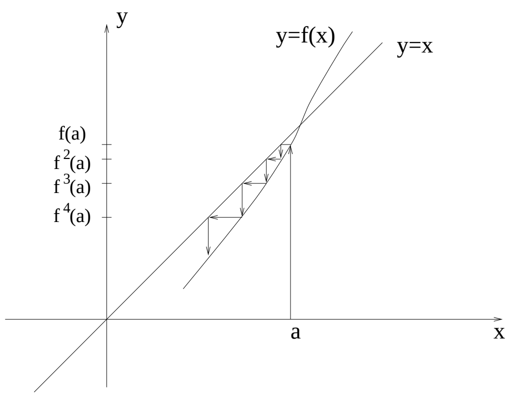
Observera nu att $f'(x) = 2x$ och alltså $f'(0) = 0$ och $f'(1) = 2$. Speciellt gäller alltså att $f'(0) < 1$ och $f'(1) > 1$. Dessa två faktum är viktiga karaktäriseringar av fixpunkterna. Man kan göra en ekvivalent och mer rigorös formulering för huruvida en fixpunkt är attraherande eller repellerande genom att räkna ut derivatan i fixpunkten. Om $|f'(a)| < 1$ så är fixpunkten a attraherande och om $|f'(a)| > 1$ så är den repellerande.

En attraktiv fixpunkt kallas för *attraktor*. Varför är det nu så att dessa två formuleringar hänger ihop? Ritar man linjen $y = x$ så kan vi åskådliggöra iterationerna på följande vis. Om vi antar att tangenten till funktionen f har lutning som är mindre än 1, dvs den får inte vara brantare än vare sig linjen $y = x$ eller linjen $y = -x$. Tag ett x och dra en lodrät linje upp till f. Drag därefter en vågrät linje i riktning mot linjen $y = x$ till dess du träffar denna linje ($y = x$). Drag nu åter en lodrät linje tills du träffar grafen till f igen, osv. Man kan illustrera detta grafiskt, se nedan.



Som synes närmar vi oss fixpunkten ju fler iterationer som görs.

Å andra sidan, om tangenten till grafen till f i fixpunkten har lutning större än 1 så kan vi med samma metod se att vi kommer att avlägsna oss från fixpunkten:



Låt oss nu titta på vad detta har med talföljder att göra. Läsaren kanske redan har listat ut att man kan se $f^n(x)$ som en talföljd, som beror på variabeln x. Låt oss bortse från x-beroendet nu och sätta $a_n = f^n(x)$. Observera att a_n ges av rekursionsformeln

$$a_{n+1} = f(a_n). \tag{8.2}$$

I kapitlet om konvergens hos talföljder talades om hur man kan avgöra om en talföljd konvergerar, dvs om det finns någon punkt b sådan att $a_n \to b$ då $n \to \infty$. Om vi nu vänder på problemet och antar att vi har en talföljd som ges via en rekursion som 8.2 (samt något initialvärde). Faktum är att vi har nyss tagit fram en metod för hur man kan avgöra om a_n konvergerar. I fallet ovan får vi med $a_n = f^n(x)$ att

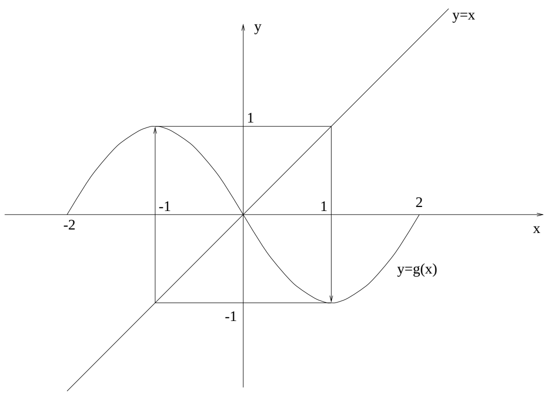
$$a_{n+1} = f(a_n) = a_n^2. \tag{8.3}$$

Vi har just rett ut att a_n konvergerar om $-1 \leqslant x \leqslant 1$, och divergerar om $|x| > 1$. Läsaren uppmanas att utreda varför tecknet $\leqslant$ används i olikheten istället för som tidigare $<$.

Vi kan använda ett analogt resonemang för vilken talföljd som helst som är given ur en rekursionsformel som (5.1), förutsatt att funktionen f är kontinuerlig (vilket i princip innebär att funktionen inte gör några plötsliga hopp). Saken är då den att om vi kan hitta en attraktiv fixpunkt till f så gäller att om vi startar med något värde x så kommer talföljden $a_n = f^n(x)$ att konvergera mot fixpunkten om x ligger i attraktionsområdet!

Vi skall nu studera s k periodiska punkter. En punkt a kallas periodisk om den återkommer efter ett visst antal iterationer, m a o $f^n(a) = a$, för något $n \geqslant 1$. Observera att det gäller då även att $f^{nk}(a) = a$ för varje heltal $k > 0$. Det heltal p som är det minsta tal sådant att $f^p(a) = a$ kallas för *ordningen* till den periodiska punkten a. Punkten a kommer då att gå genom de **olika** punkterna $a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ för att sedan återkomma till punkten $f^p(a) = a$. Observera att om $n = 1$ så är a en fixpunkt. Själva banan som den periodiska punkten går genom kallas för en cykel. Det finns liksom i fallet med fixpunkter, både attraktiva och repellerande cykler. Om ordningen är p så talar vi om p-cykler. Vi kan göra en liknande frågeställning som i exemplet ovan med en fixpunkt, nämligen följande: Finns det ett motsvarande attraktionsområde till en *attraktiv* cykel? Svaret är ja. Situationen är mycket lik den med fixpunkten. Det är helt enkelt så att om vi startar tillräckligt nära en attraktiv cykel så kommer man att närma sig denna. Om vi antar att vi har den attraktiva cykeln $a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ och startar med en punkt b tillräckligt nära a så kommer $f^n(b)$ närma sig $f^n(a)$ då n ökar.

Låt oss nu titta på funktionen $g(x) = -\sin\frac{\pi}{2}x$. Eftersom $g(1) = -1$ och $g(-1) = 1$ får vi $g^2(1) = 1$. Alltså är 1 en periodisk punkt av ordning 2 (givetvis är också -1 periodisk av ordning 2). Är då denna 2-cykel attraktiv? Svaret är ja. Detta illustreras enklast genom att rita grafen till $g(x)$ (se nedan).



Lägg märke till att grafen till g vänder vid punkterna 1 och -1. Tangenten till grafen är alltså parallell med x-axeln i dessa två punkter. Observera att man inte får ett rigoröst bevis för att denna 2-cykel är attraktiv genom att rita en graf och titta lite på den! Läsaren kan dock med fördel göra egna iterationer med figurens hjälp enligt samma metod som användes i fallet med de attraktiva och repellerande fixpunkterna. Pröva med startvärden som ligger nära 1 men skilt från 1! Kvadraten i figuren svarar mot den ovan nämnda 2-cykeln.

För er som kan derivator igen:

Anta att vi har en cykel $a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{p-1}(a)$, med a periodisk av ordning p, dvs $f^p(a) = a$. Då är f attraktiv om $|(f^p)'(a)| < 1$.

Med denna definition kan vi nu lätt sluta oss till att 2-cykeln i exemplet ovan är attraktiv. Derivatan av g är $g'(x) = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$. Enligt kedjeregeln blir derivatan av $g^2(x)$

$$(g^2)'(x) = g'(g(x))g'(x) = \frac{\pi^2}{4}\cos(-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x))\cos(\frac{\pi}{2}x). \tag{8.4}$$

Vi får då att $(g^2)'(1) = 0 < 1$. Alltså är 2-cykeln attraktiv. Man har en speciell benämning på cykler vars derivata är noll som i detta fall. Cykeln kallas då *superattraktiv*.

Om vi nu skulle ha en talföljd som ges via rekursionsformeln

$$a_{n+1} = g(a_n) \tag{8.5}$$

så gäller att a_n skulle närma sig 2-cykeln $1, -1$ om vi startar i attraktionsområdet till densamma. a_n skulle alltså inte konvergera utan hoppa mellan en liten omgivning till 1 och -1 då n växer.

9. FLERDIMENSIONELLA "TALFÖLJDER"

Vi har sett exempel på hur talföljder genereras av en rekursion som beror av en variabel. Man kan också tänka sig att generera en mängd tal med hjälp av en rekursionsformel i flera variabler.

Exempel 9.1. n personer ska spela brännboll. För att spela brännboll behöver man ett utelag och ett innelag. Man har bestämt att utelaget ska innehålla k personer. På hur många sätt kan man välja vilka som är ute?

Lösning: Vi nöjer oss för ögonblicket med att ta fram en rekursiv formel. Vi har n objekt och vill bland dessa välja ut k stycken. Ordningen spelar ingen roll. Vi betecknar detta tal med $\binom{n}{k}$.

Betrakta en av brännbollspelarna. Denne är antingen med i utelaget eller i innelaget. Om spelaren är med i utelaget måste vi välja ytterligare $k-1$ spelare bland de återstående $n-1$ spelarna. Det kan vi göra på $\binom{n-1}{k-1}$ sätt. Om spelaren inte är med i utelaget måste vi välja k spelare bland de återstående $n-1$ spelarna. Det kan vi göra på $\binom{n-1}{k}$ sätt. Alltså får vi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Talen $\binom{n}{k}$ kallas *binomialkoefficienter* och är mycket vanliga inom kombinatoriken[10]. Man brukar säga "n välj k" eller "n över k". Skriver man upp dem i en triangel så att varje rad svarar mot ett visst n får man det som kallas *Pascals triangel* (tabell 1). Enligt rekursionsformeln gäller att varje tal är summan av de två tal, som står närmast ovanför.

TABELL 1. Pascals triangel. I rad n och position k från vänster finner vi $\binom{n-1}{k-1}$. Överst har vi alltså $\binom{0}{0}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Övning 9.2. *Utöka Pascals triangel med några rader. Vilka tal finns på andra respektive tredje diagonalen från vänster? Hur ser rekursionsformeln ut i dessa fall ($k = 1$ resp $k = 2$)?*

För att ta fram en direkt formel för binomialkoefficienterna ska vi titta litet närmare på hur det går till när man väljer. Antag att vi har n olika objekt att välja bland och att vi vill skapa en kö av dessa. Den första personen i kön kan vi välja på n olika sätt. Den andra kan vi välja på $n-1$ olika sätt (eftersom vi bara har $n-1$ personer kvar att välja bland), den tredje kan vi välja på $n-2$ sätt osv. Sammanlagt blir det $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sätt, vilket vi betecknar $n!$ (utläses "n-fakultet").

Vi kan nu skapa utelag och innelag genom att ställa alla spelare i en lång kö, vilket vi kan göra på $n!$ sätt, och sedan dela kön efter person nummer k. Men vi är inte riktigt färdiga då. Det spelar ju ingen roll i vilken ordning de första k spelarna står, så vi kommer att få samma utelag varje gång vi väljer dessa k spelare först. Det kan vi göra på $k!$ olika sätt, så vi måste dela med $k!$. På samma sätt ser vi att ordningen i innelaget inte heller spelar någon roll, så vi får även dela med $(n-k)!$. Alltså gäller att antalet sätt att välja utelaget blir $n!$ delat med $k!$ och $(n-k)!$, dvs

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Övning 9.3. *Använd induktion för att visa ovanstående formel med hjälp av rekursionen.*

Ledning: *Utför induktionen i n-led, dvs antagandet är att formeln gäller för alla k med $n = p-1$ och sedan visar man det för alla k med $n = p$. Man inser enkelt att $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, så vi behöver bara visa formeln för de k som är sådana att $1 \leqslant k \leqslant n-1$.*

[10] Kombinatorik kallas den del av matematiken där man räknar på hur många sätt man kan göra olika saker.

Övning 9.4. *Vi ser att Pascals triangel verkar vara symmetrisk. Bevisa detta!*

Övning 9.5. *Vi använde i induktionsdelen att* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *(med* $a = p$ *och* $b = -1$*). Koefficienterna i summan (1, 3, 3, 1) stämmer överens med rad 4 i Pascals triangel. Vi har alltså*

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

och mer generellt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Visa detta!

Ledning*: Detta görs enklast med ett kombinatoriskt bevis, dvs man förklarar varför koefficienterna blir vad de blir. Det går även att göra med induktion.*

Ett annat intressant problem är att undersöka hur många sätt n personer kan dela in sig i k grupper. Dessa tal betecknar vi $S(n,k)$ och kallas *Stirlingtalen av andra slaget*. Varje grupp måste ha minst en person och alla personer måste vara med i precis en grupp. Även här finns det en rekursionsformel.

Vi antar att vi placerat ut alla personer utom den sista. Denna person är antingen själv i en grupp eller i en grupp tillsammans med andra. Om personen är själv är de andra $n-1$ personerna indelade i $k-1$ grupper. Det kan göras på $S(n-1,k-1)$ sätt. Annars är de andra $n-1$ personerna indelade i k grupper och vi måste välja vilken av dessa grupper som den sista personen ska vara med i. Det kan vi göra på k olika sätt. Vi får alltså

$$S(n,k) \;=\; S(n-1,k-1) + k\ S(n-1,k).$$

Även dessa tal kan skrivas i en triangel (tabell 2). Denna gång blir inte triangeln symmetrisk.

TABELL 2. Stirlingtalen. I rad n och position k från vänster finner vi $S(n-1,k-1)$. Överst har vi alltså $S(0,0)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array}$$

Övning 9.6. *Utöka tabellen med Stirlingtal med några rader. Vilka tal finns på andra diagonalen från höger? Vilka finns på tredje diagonalen från vänster? Hur ser rekursionformlerna ut i dessa fall (*$k = n-1$ *respektive* $k = 2$*)?*

Övning 9.7. *Visa med hjälp av induktion att Stirlingtalen ges av*

$$S(n,k) \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

Ledning*: Induktionssteget är rätt så svårt. Den som är ovan vid summaräkningar kan nöja sig med att förvissa sig om att nedanstående är korrekt och lägga till slutet.*

Vi gör först våra antaganden. Vi antar att formeln gäller för samtliga k *med* $n = p-1$*, dvs att*

$$S(p-1,k) \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^{p-1}.$$

Vi ska visa att den gäller för samtliga k *för* $n = p$*, vilket skrivs*

$$S(p,k) \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^{p}.$$

Nedanstående beräkning visar detta.

$$S(p,k) \;=\; k\; S(p-1,k) + S(p-1,k-1)$$

$$= \; \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^{p-1} \; + \; \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} \binom{k-1}{i} i^{p-1}$$

$$= \; \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^{p-1} \; - \; \frac{k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i} i^{p-1}$$

$$= \; \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i} \right) \; \frac{k}{i}\; i^{p} \; = \; \ldots$$

Vi har nu bara en summa, vars första och sista faktor stämmer överens med det vi söker. Det räcker alltså att snygga till faktorerna i mitten av summan.