KTH Matematik

Tentamen del 1
SF1511, 2018-03-16, kl 8.00-11.00,
Numeriska metoder och grundläggande programmering

Namn: ....

Personnummer:... **Program och årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT17-VT18 här:

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn på varje sida.

1. Modellen $y(x) = \alpha x + \beta x^2$ ska anpassas till punkterna i tabellen nedan i minstakvadratmening.

x	-1	0	1
y	0	-0.5	4

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

(1 p) **a)** Vilket ekvationssystem måste man lösa för att bestämma minstakvadrat-approximationen?

☐ $A^\top A\mathbf{c} = \mathbf{y}$ ☐ $\frac{1}{2}AA^\top\mathbf{c} = A^\top\mathbf{y}$ ☐ $A^\top A\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{y}$

☐ $A^\top A\mathbf{c} = A\mathbf{y}$ ☐ $AA^\top\mathbf{c} = A^\top\mathbf{y}$ ☐ $A^\top A\mathbf{c} = A^\top\mathbf{y}$

(2 p) **b)** Vad blir α och β?

☐ $\alpha = 5/2$ och $\beta = 5/2$ ☐ $\alpha = 2$ och $\beta = 2$

☐ $\alpha = 1/2$ och $\beta = 1/2$ ☐ $\alpha = 0$ och $\beta = 1$

☐ $\alpha = 1$ och $\beta = 3/4$ ☐ $\alpha = 4$ och $\beta = 4$

☐ $\alpha = 1$ och $\beta = 0$ ☐ $\alpha = 4$ och $\beta = 2$

Var god vänd

(2 p) **2.** Givet ekvationen $\cos(2\pi x) - e^x = 0$.

a) En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 1$ ger x_1 lika med:

☐ 0	☐ $e/4$	☐ $-1/2$	☐ $1/4$
☐ $1/2$	☐ $1/e$	☐ $-2/e$	☐ $-1/4$

(1 p) **b)** Till vilken rot och på vilket sätt konvergerar Newtons metod med startgissning $x_0 = 1$?

- ☐ linjär konvergens till $x = 1$
- ☐ kvadratisk konvergens till $x = 1$
- ☐ linjär konvergens till $x = 0$
- ☐ kvadratisk konvergens till $x = 0$
- ☐ linjär konvergens till $x = -1$
- ☐ kvadratisk konvergens till $x = -1$

(2 p) **3.** Integralen

$$\int_0^1 \frac{2x + (2x)^4}{2x + 1} dx$$

approximeras med trapetsregeln. Vad blir det approximativa värdet om steglängden $h = 0.5$?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

(2p) **4.** En iterativ metod har använts till att lösa den ickelinjära ekvationen $f(x) = 0$. Tabellen nedan visar felet e_k vid iteration k

k	1	2	3
e_k	$1.41 \cdot 10^{-1}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-9}$

Vilken konvergensordning har metoden?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

(2 p) **5.** En numerisk kvadraturmetod har använts för att beräkna en integral. Tabellen nedan visar felet e_h vid steglängd h

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
e_h	$1.6 \cdot 10^{-1}$	10^{-2}	$6.23 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-5}$

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

Tentamen fortsätter på nästa blad

(2 p) **6.** Givet tabellen nedan

x_i	0	2	3
y_i	0	0	1

Låt $p(x)$ vara det andragradspolynom som interpolerar punkterna, dvs $p(x_i) = y_i$. Vad blir $p(1)$?

- ☐ 0
- ☐ -1/4
- ☐ -1/2
- ☐ -1
- ☐ -1/3
- ☐ -1/5

(2 p) **7.** Givet begynnelsevärdesproblemet

$$y'(t) = -2\pi(t+1)\cos(\, y(t)\,), \qquad y(0) = 0.$$

Vilken approximation $y_2 \approx y(1.0)$ ges med Framåt Euler med steglängden 0.5?

- ☐ $\pi/2$
- ☐ 2π
- ☐ $-\pi/4$
- ☐ -1
- ☐ $1/2$
- ☐ $-1/4$
- ☐ $-\pi^2/4$
- ☐ 0

(2 p) **8.** Funktionen nedan är given.

```
function y = foo(x, a)
for k=-1:0
    b=x-k;
    while (x > -2) && (x < 2)
        x=x+a+1;
    end
end
y = b + x;
end
```

Resultatet av anropet `foo(-1, 10)` blir

- ☐ -11
- ☐ -2
- ☐ 3
- ☐ 10
- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ 6
- ☐ 20

Var god vänd

(2 p) **9.** Vilka utsagor är rätt och vilka är fel?
(Poängsättning: 1-4 korrekta svar=0 p, 5-6 korrekta svar=2 p.)

a) Intervallhalvering är en effektiv metod för att lösa integraler.

☐ rätt ☐ fel

b) Noggrannhetsordningen för trapetsregeln är två.

☐ rätt ☐ fel

c) Fixpunktiterationer konvergerar alltid om startgissningen är tillräckligt bra.

☐ rätt ☐ fel

d) Vi använder Framåt Euler för att lösa begynnelsevärdesproblemet $y'(t) = -y(t)$ i intervallet $t \in [0, 5]$ med startvärdet $y(0) = -1$. Ju kortare steglängd vi tar, desto större blir tidsåtgången.

☐ rätt ☐ fel

e) Ett stort triangulärt ekvationssystem går snabbare att lösa än ett tridiagonalt ekvationssystem av samma storlek.

☐ rätt ☐ fel

f) Finita differensmetoden för linjära randvärdesproblem leder till glesa linjära ekvationssystem.

☐ rätt ☐ fel