SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 3
4 november 2016

Idag

Förra gången

Stokastiska variabler (Kap. 3.2)

Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)

Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)

Idag

Förra gången

Stokastiska variabler (Kap. 3.2)

Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)

Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)

Förra gången: betingade sannolikheter

- Vi definierade *betingade sannolikheter*:

Definition

Låt A och B vara händelser med $\mathbb{P}(A) > 0$. Då kallas kvoten

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

den *betingade sannolikheten för B givet att A har inträffat*.

- Ofta känner man betingade sannolikheter snarare än obetingade dylika. Följande sats är då användbar.

Sats (lagen om total sannolikhet)

Låt händelserna $H_1, \ldots, H_n$ vara parvis oförenliga och sådana att $\cup_{i=1}^n H_i = \Omega$. Då gäller för varje händelse A att

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Förra gången: Bayes' formel

- Bayes' formel används när man vill räkna ut betingade sannolikheter under det att man känner sannolikheterna för omvända betingningar.

Sats (Bayes' formel)

Under samma villkor som i lagen om total sannolikhet gäller att

$$\mathbb{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}_{=\mathbb{P}(A)}}$$

för alla $i = 1, \dots, n$.

Exempel: kontrollskrivning

- När en kontrollskrivning för SF1901 Sannolikhetsteori och statistik genomförs på KTH väljer 68 av totalt 157 studenter att delta. Av de som deltog i kontrollskrivningen klarade 80% godkänt på tentamen, medan motsvarande siffra för de som ej deltog i kontrollskrivningen var 58%.
  (a) Inför lämpliga händelser och beräkna sannolikheten att en slumpvis vald student blev godkänd på tentamen.

  [svar: 0.68]

  (b) Beräkna den betingade sannolikheten att en slumpvis vald student ej deltog i kontrollskrivningen givet att han eller hon blev underkänd på tentamen.

  [svar: 0.73]

Förra gången: oberoende

- Vi definierade *oberoende händelser* enligt:

Definition

Låt A och B vara händelser. Om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

sägs A och B vara *oberoende*.

- Om A och B är oberoende så gäller att $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.
- För ett godtyckligt antal händelser gäller att oavsett vilka händelser vi plockar ut så skall sannolikheten för snittet vara produkten av sannolikheterna.

Förra gången: oberoende (forts.)

- Vi konstaterade slutligen följande:

Sats

Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är oberoende så ges sannolikheten att minst en av dem inträffar av

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i)).$$

Exempel: 10 kast med en tärning

- Vad är sannolikheten att man vid 10 upprepade kast med en tärning erhåller minst en 6:a?

$$\left[\text{svar: } 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.84\right]$$

Idag

Förra gången

Stokastiska variabler (Kap. 3.2)

Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)

Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)

Definition av stokastiska variabler

Definition

En *stokastisk variabel* (förkortat *s.v.*) är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum.

- Med andra ord: en s.v. ordnar ett tal till varje utfall av ett slumpmässigt försök.
- Vi kommer att beteckna stokastiska variabler med X, Y, ...

Idag

Förra gången

Stokastiska variabler (Kap. 3.2)

Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)

Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)

Sannolikhetsfunktion

Definition

En s.v. kallas *diskret* om den kan anta ett ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$. Funktionen

$$p_X(k) = \mathbb{P}(\{\,\omega : X(\omega) = k\}) = ''\mathbb{P}(X = k)'', \quad k \in \{k_1, k_2, k_3, \ldots\},$$

kallas *sannolikhetsfunktionen* för X.

- Då p_X beskriver sannolikheter gäller det givetvis att $0 \leq p_X(k) \leq 1$ för alla k.
- Då mängderna $\{\omega : X(\omega) = k_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, är parvis oförenliga medför axiom (3) att för alla $A \subset \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}\left(\cup_{k\in A}\{\,\omega : X(\omega) = k\}\right) \\ &= \sum_{k\in A} \mathbb{P}\left(\{\,\omega : X(\omega) = k\}\right) = \sum_{k\in A} p_X(k).\end{aligned}$$

Sannolikhetsfunktion (forts.)

- Speciellt gäller att $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(k_i) = 1$.
- I regel kommer värdemängden för en diskret s.v. X att ges av de *naturliga talen*, dvs. $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ eller $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- Sannolikhetsfunktionen bestämmer *fördelningen* av sannolikhetsmassan över värdemängden.
- Exempel!
- Vi kommer nu att ge exempel på de vanligaste diskreta fördelningarna.

Exempel: ffg-fördelning

Definition

Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots\},$$

där $0 < p < 1$, sägs X vara *för-första-gången-fördelad* (kodbeteckning $X \in \text{ffg}(p)$).

- Antag att vi utför en serie av oberoende försök där varje försök lyckas med sannolikheten p.
- Jfr. upprepade tärningskast där sannolikheten att få en sexa är $p = 1/6$.
- Låt X vara antal försök som görs tills dess man lyckas *för första gången*. Då gäller att $X \in \text{ffg}(p)$!

Exempel: geometrisk fördelning

Definition

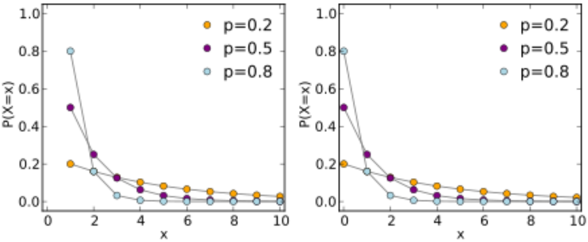
Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = (1-p)^k p, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

där $0 < p < 1$, sägs X vara *geometriskt fördelad* (kodbeteckning $X \in \mathrm{Geo}(p)$).

- Vi betraktar som tidigare oberoende försök men låter denna gång X vara antalet försök som görs tills dess att man lyckas för första gången *exklusive* det försök i vilket man lyckas. Då gäller att $X \in \mathrm{Geo}(p)$.

Exempel: geometrisk fördelning/ffg-fördelning



Figur: Sannolikhetsfunktioner för Geo(p)- och ffg(p)-fördelningarna för olika värden på p.

Exempel: binomialfördelning

Definition

Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\},$$

där $0 < p < 1$, sägs X vara *binomialfördelad* (kodbeteckning $X \in \mathrm{Bin}(n, p)$).

- Vi som tidigare betraktar oberoende försök och men begränsar oss denna gång till n st. dylika.
- Låt X vara antalet lyckade försök av dessa n. Då gäller att $X \in \mathrm{Bin}(n, p)$!

Exempel: apa testar stryktipset

- I en tipsrad omfattande 13 matcher kan varje match tippas på tre olika sätt (nämligen 1, x eller 2). En tippande, ej fotbollsintresserad apa anses för varje match välja ett av de tre alternativen med lika sannolikhet. Dessutom tippar den alla matcher oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att den får, säg, 10 rätt?
- Lösning: låt den s.v. X vara antal rätt. Då gäller att $X \in \mathrm{Bin}(13, 1/3)$ och

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{13}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{13-10} = 0{,}0014.$$

Exempel: Poissonfördelning

Definition

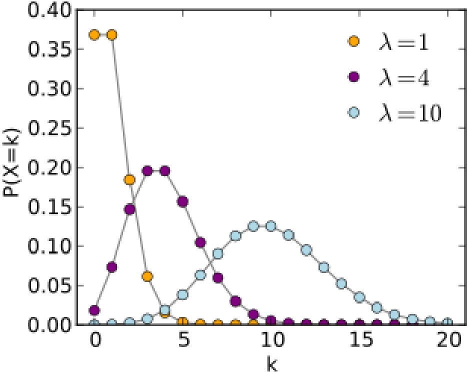
Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

där $\mu > 0$, sägs X vara *Poissonfördelad* (kodbeteckning: $X \in \mathrm{Po}(\mu)$).

- Poissonfördelningen uppstår då man låter $p = \mu/n$ och $n \to \infty$ i binomialfördelningen, dvs. då antalet oberoende försök är stort och sannolikheten att lyckas i varje försök är liten.
- Kan t.ex. användas för att modellera antalet olyckor i ett visst tidsintervall (såsom antalet av häst ihjälsparkade soldater i Preussiska armén (L. Bortkiewicz, 1898)).

Exempel: Poissonfördelning (forts.)



Figur: Sannolikhetsfunktion för Po(μ)-fördelningen för olika värden på μ (i plotten kallas μ för λ).

Idag

Förra gången

Stokastiska variabler (Kap. 3.2)

Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)

Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)

Kontinuerlig s.v.

- En kontinuerlig s.v. kan anta alla värden i ett intervall av $\mathbb{R}$ eller ev. hela $\mathbb{R}$. Den kan också ta värden i flera åtskilda intervall av $\mathbb{R}$.
- I fallet då X är kontinuerlig ligger variabelns värden för tätt för att man skall kunna definiera någon sannolikhetsfunktion.
- Sannolikhetsmassan sprids istället ut över $\mathbb{R}$ med en *täthetsfunktion* f_X.

Definition

Om det finns en icke-negativ funktion f_X sådan att

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\, dx$$

för alla A, sägs X vara en *kontinuerlig stokastisk variabel*. Funktionen f_X kallas *täthetsfunktionen för den s.v. X*.

Kontinuerlig s.v. (forts.)

- Notera att f_X måste vara icke-negativ för att kunna beskriva sannolikheter.
- Fördelningen hos en kontinuerlig s.v. bestäms entydigt av f_X.
- Jämför de kontinuerliga och diskreta fallen:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$$

- Då X tar värden i $\mathbb{R}$ gäller alltid att

$$\mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1,$$

dvs. arean under täthetsfunktionen är alltid 1.

Kontinuerlig s.v. (forts.)

- Då arean under en punkt är noll gäller att $\mathbb{P}(X = a) = 0$ och sålunda

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx.$$

- Om speciellt $b = a + \delta$ och f_X är kontinuerlig så finns, enligt integralkalkylens medelvärdessats, $\xi \in [a, a + \delta]$ så att

$$\mathbb{P}(a < X \leq a + \delta) = \int_a^{a+\delta} f_X(x)\, dx = f_X(\xi)\delta \approx f(a)\delta.$$

Exempel: likformig fördelning

Definition

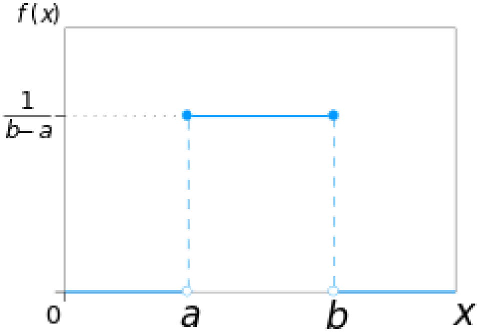
Låt $a < b$. Om en s.v. X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{om } a < x < b, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

sägs X vara *likformigt fördelad* (kodbeteckning: $X \in \mathrm{U}(a, b)$).

- Den likformliga fördelningen kan ses som en kontinuerlig motsvarighet till att "alla punkter är lika sannolika" (kom dock ihåg att alla utfall i själva verket har sannolikheten noll i det kontinuerliga fallet).

Exempel: likformig fördelning (forts.)



Figur: Täthetsfunktion för U(a, b)-fördelning.

Nästa föreläsning

- Mer om kontinuerliga s.v.,
- fördelningsfunktioner,
- funktioner av s.v. (= nya s.v.),
- flerdimensionella s.v.