SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 2
2 november 2016

Idag

Lite repetition och kombinatorik

Betingad sannolikhet (Kap. 2.6)

Oberoende händelser (Kap. 2.7)

Idag

Lite repetition och kombinatorik

Betingad sannolikhet (Kap. 2.6)

Oberoende händelser (Kap. 2.7)

Förra gången: slumpmässiga försök, utfallsrum och händelser

- Vi kallade ett försök *slumpmässigt* om
  (1) det kan upprepas om och om igen och
  (2) framtida utfall kan inte förutsägas exakt (även under fullt kontrollerade former för experimentet).
- Detta formaliserades med hjälp av följande definitioner.

Definition

(i) Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas *utfall* (bet. ω). Mängden av möjliga utfall kallas *utfallsrum* (Ω).
(ii) En *händelse* (A, B, ...) är en samling utfall, alltså en delmängd av utfallsrummet.

- Sedan diskuterade vi lite grundläggande mängdlära.

Förra gången: sannolikheter och Kolmogorovs axiomsystem

- Sannolikheten för en händelse A betecknas $\mathbb{P}(A)$ och bör väljas så att den överensstämmer med den *relativa frekvensen för A* om det slumpmässiga försöket upprepas många gånger.
- *Kolmogorovs axiom* överensstämmer med denna frekvenstolkning av sannolikhet:
  (1) För varje händelse A gäller att $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
  (2) För hela utfallsrummet Ω gäller att $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  (3) För parvis oförenliga händelser $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gäller att

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

Förra gången: likformigt sannolikhetsmått

- Om utfallsrummet är diskret, dvs. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$, räcker det med att definiera sannolikheter $\mathbb{P}(\omega_i) = p_i$ för de olika utfallen under förutsättning att $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$.
- I det viktiga specialfallet med m stycken möjliga utfall $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m\}$ med *lika sannolikhet*, dvs. $p_i = 1/m$, ger axiom (3) den *klassiska sannolikhetsdefinitionen*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{m}$$
$$= \frac{\text{antal utfall i } A}{m} = \frac{\text{"antalet gynnsamma utfall"}}{\text{"antalet möjliga utfall"}}.$$

- I detta fall föreligger ett s.k. *likformigt sannolikhetsmått*.
- Exempel!

Exempel: kast med två tärningar

- Man kastar en röd och en vit tärning. Beräkna sannolikheterna för händelserna

$$
\begin{aligned}
A &= \text{"röda tärningen visar sexa"},\\
B &= \text{"summan är sju"},\\
C &= \text{"summan är åtta"}.
\end{aligned}
$$

$$\left[\text{svar: } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \tfrac{1}{6},\ \mathbb{P}(C) = \tfrac{5}{36}\right]$$

Lite kombinatorik

- Vid beräkningar med likformiga sannolikhetsmått är följande princip ofta användbar.

Sats (multiplikationsprincipen)

Antag att det föreligger n olika åtgärder. Om åtgärd i ($\leq n$) kan utföras på a_i olika sätt så finns det totalt

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

olika sätt att utföra de n åtgärderna.

Lite mer kombinatorik

- Kom ihåg att

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

- Med hjälp av multiplikationsprincipen kan man visa följande sats.

Sats

Antalet sätt att välja k element ur n ges av följande tabell.

	med återläggning	*utan återläggning*
med ordningshänsyn	n^k	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$
utan ordningshänsyn	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Exempel: två klassiska urnmodeller

- I en urna finns s svarta och v vita kulor. Man drar slumpmässigt n kulor ur urnan.
  (a) Antag att kulorna dras *med* återläggning. Vad är sannolikheten att få k vita kulor?

  $$\left[\text{svar: } \binom{n}{k} \left(\frac{v}{s+v} \right)^k \left(\frac{s}{s+v} \right)^{n-k} \right]$$

  (b) Antag nu istället att kulorna dras *utan* återläggning. Vad är sannolikheten att få k vita kulor nu?

  $$\left[\text{svar: } \frac{\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{s+v}{n}} \right]$$

Idag

Lite repetition och kombinatorik

Betingad sannolikhet (Kap. 2.6)

Oberoende händelser (Kap. 2.7)

Betingade sannolikheter

- *Betingade sannolikheter* är ett sätt att beskriva hur information om en viss händelse påverkar sannolikheten för en annan händelse.
- Låt $(\Omega, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. Antag att vi vet att en händelse A har inträffat; hur kan vi då bestämma sannolikheten $\mathbb{P}(B \mid A)$, säg, för att någon annan händelse B också inträffar?

Definition

Låt A och B vara händelser med $\mathbb{P}(A) > 0$. Då kallas kvoten

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

den *betingade sannolikheten för B givet att A har inträffat*.

Lagen om total sannolikhet

- Betingade sannolikheter uppfyller Kolmogorovs axiomsystem och därför också alla satser för vanliga sannolikhetsmått.
- Betingade sannolikheter är särskilt användbara tack vare följande sats.

Sats (lagen om total sannolikhet)

Låt händelserna $H_1, \ldots, H_n$ vara parvis oförenliga och sådana att $\cup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Då gäller för varje händelse A att

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Bayes' formel

- Ofta vill man vända på en betingning, dvs. beräkna $\mathbb{P}(B \mid A)$ då man känner $\mathbb{P}(A \mid B)$. Genom dubbla användningar av definitionen får man

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

- Genom att kombinera formeln ovan med lagen om total sannolikhet erhålls, med $B = H_i$, följande.

Sats (Bayes' formel)

Under samma villkor som i lagen om total sannolikhet gäller att

$$\mathbb{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid H_j)\mathbb{P}(H_j)}$$

för alla $i = 1, \ldots, n$.

Exempel: krona eller klave?

- (Gissa först och räkna sedan!) En låda innehåller två mynt, ett vanligt med krona på ena sidan och klave på den andra samt ett med krona på båda sidorna (en s.k. tvåkrona?). Ett mynt väljs slumpvis och kastas varvid krona kommer upp. Med vilken sannolikhet visar den andra sidan också krona?

$$\left[\text{ svar: } \frac{2}{3}\right]$$

Idag

Lite repetition och kombinatorik

Betingad sannolikhet (Kap. 2.6)

Oberoende händelser (Kap. 2.7)

Oberoende händelser

- Om $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)$ så erhålls

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B),$$

  dvs. A *påverkar ej* sannolikheten för B.
- Detta leder oss till följande definition.

Definition

Låt A och B vara händelser. Om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

sägs A och B vara *oberoende*.

Oförenliga vs. oberoende

- Kan två oförenliga händelser med positiv sannolikhet vara oberoende?
- Nej! Ty i så fall skulle det gälla att

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0,$$

vilket motsäger

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Exempel: kast med två tärningar

- Man kastar en röd och en vit tärning. Betrakta åter händelserna

$$A = \text{"röda tärningen visar sexa"},$$
$$B = \text{"summan är sju"},$$
$$C = \text{"summan är åtta"}.$$

Är några av dessa händelsepar oberoende?

[svar: Ja, A och B.]

Utvidgning till fler än två händelser

- Inte helt självklar!

Definition

Tre händelser A, B och C sägs vara oberoende om

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

och händelserna dessutom är parvis oberoende.

- Villkoret $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ räcker inte, ty om t.ex. $B = A^*$ och $C = \varnothing$ så skulle A och A^* vara oberoende, vilket inte är realistiskt.

Utvidgning till fler än två händelser (forts.)

- Allmänt: för ett godtyckligt antal händelser gäller att oavsett vilka händelser vi plockar ut så skall sannolikheten för snittet vara produkten av sannolikheterna.
- Om A och B är oberoende är även A och B^* oberoende, ty

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^*) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^*).\end{aligned}$$

  Detta gäller även allmänt.
- Följande sats är mycket användbar.

Sats

Om händelserna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är oberoende så ges sannolikheten att minst en av dem inträffar av

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_i)).$$

Nästa föreläsning

- Stokastiska variabler,
- diskreta och kontinuerliga fördelningar.