SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 11
30 november 2016

Idag

Förra gången

Konfidensintervall för σ

Ensidiga konfidensintervall

Två vanliga modeller: oberoende stickprov/stickprov i par

Idag

Förra gången

Konfidensintervall för σ

Ensidiga konfidensintervall

Två vanliga modeller: oberoende stickprov/stickprov i par

Förra gången: konfidensintervall

- Vi införde följande definition:

Definition

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara utfall av s.v. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ och låt $0 < \alpha < 1$. Ett intervall

$$\mathrm{I}_\theta = (a_1(x_1, \ldots, x_n), a_2(x_1, \ldots, x_n))$$

kallas ett *konfidensintervall för* θ *med konfidensgraden* $1 - \alpha$ om det täcker θ med sannolikheten $1 - \alpha$, dvs.

$$\mathbb{P}(a_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < a_2(X_1, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

- Om både a_1 och a_2 är ändliga kallas intervallet *tvåsidigt*.
- Om antingen $a_1 = -\infty$ eller $a_2 = \infty$ kallas det *ensidigt*.

Förra gången: allmän metod för konfidensintervall

- Vi gick till väga enligt följande:
  (1) Hitta en s.k. *pivotvariabel* $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ vars fördelning inte beror på θ.
  (2) Hitta kvantiler $x_{\alpha/2}$ och $x_{1-\alpha/2}$ till T så att

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}).$$

  (3) Lös ut θ enligt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}\left(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(a_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < a_2(X_1, \ldots, X_n)\right). \end{aligned}$$

  (4) Intervallet ges så av $I_\theta = (a_1(x_1, \ldots, x_n), a_2(x_1, \ldots, x_n))$.
- I moment (1) är det lämpligt att utgå från en *punktskattning* av θ.

Tillämpning på normalfördelningen

- Metoden användes för att konstruera följande konfidensintervall för μ i en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning.

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $N(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänt. Då är

$$I_\mu = \begin{cases} (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D) & \text{om } \sigma \text{ är känt } (D = \sigma/\sqrt{n}), \\ (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d) & \text{om } \sigma \text{ är okänt } (d = s/\sqrt{n}), \end{cases}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

- Det återstår att göra konfidensintervall för σ, och för detta behövs en ny fördelning: χ^2-*fördelningen*.

Idag

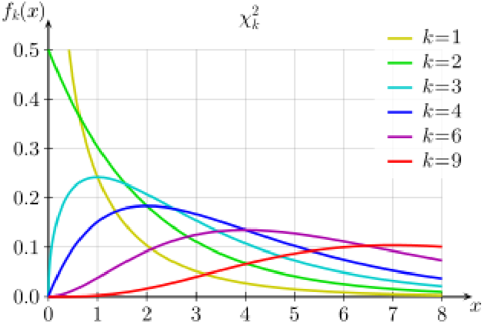
Förra gången

Konfidensintervall för σ

Ensidiga konfidensintervall

Två vanliga modeller: oberoende stickprov/stickprov i par

χ^2-fördelningen



Figur: Täthetsfunktioner för $\chi^2(k)$-fördelningar (på formen $f_X(x) = cx^{k/2-1}e^{-x/2}$, $x > 0$) med olika antal frihetsgrader k. (OBS! k kallas f i boken och tabellen!)

Variansskattning och χ^2-fördelning

- Kom ihåg att för alla fördelningar är

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 n\right)$$

en väntevärdesriktig skattning av variansen σ^2.

- I normalfördelningsfallet har S^2 "nästan" χ^2-fördelning:

Sats

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och $N(\mu, \sigma)$-fördelade. Då gäller att

(i) $\bar{X} = \mu^* \in N(\mu, D)$, *där* $D = D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$,

(ii) $\displaystyle \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$,

(iii) $\bar{X}$ *och* S^2 *är oberoende.*

Konfidensintervall för σ

- Vi följer receptet från förra gången:
  (1) En naturlig pivotvariabel är

$$T = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1).$$

  (2) T har kvantilerna $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ och $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$.
  (3) Vi löser ut σ enligt

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right). \end{aligned}$$

Konfidensintervall för σ (forts.)

(4) Detta ger intervallet

$$I_\sigma = \left(s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} \right).$$

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $N(\mu, \sigma)$-fördelning. Då ges ett konfidensintervall för σ med konfidensgraden $1-\alpha$ av

$$I_\sigma = (k_1 s, k_2 s),$$

där

$$k_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} \quad \textit{och} \quad k_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}.$$

Samband mellan stickprovsfördelningar

- Följande sats kopplar ihop normal-, χ^2- och t-fördelningarna.

Sats

Om $X \in N(0,1)$ och $Y \in \chi^2(k)$ är oberoende så gäller att

$$\frac{X}{\sqrt{Y/k}} \in t(k).$$

- En konsekvens är följande sats (användes förra gången).

Sats

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och $N(\mu, \sigma)$-fördelade. Då gäller att

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu}{d} \in t(n-1),$$

där $d = S/\sqrt{n}$ är medelfelet och $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$.

Idag

Förra gången

Konfidensintervall för σ

Ensidiga konfidensintervall

Två vanliga modeller: oberoende stickprov/stickprov i par

Ensidiga konfidensintervall

- Hittills har vi bara diskuterat tvåsidiga konfidensintervall.
- Med precis samma metod som ovan (övning!) kan man visa att

$$\mathrm{I}_\mu = \begin{cases} (\bar{x} - \lambda_\alpha D, \infty) & \text{om } \sigma \text{ är känt } (D = \sigma/\sqrt{n}), \\ (\bar{x} - t_\alpha(n-1)d, \infty) & \text{om } \sigma \text{ är okänt } (d = s/\sqrt{n}) \end{cases}$$

  är *ensidiga, nedåt begränsade* konfidensintervall.
- Uppåt begränsade konfidensintervall konstrueras analogt, dvs.

$$\mathrm{I}_\mu = \begin{cases} (-\infty, \bar{x} + \lambda_\alpha D) & \text{om } \sigma \text{ är känt,} \\ (-\infty, \bar{x} + t_\alpha(n-1)d) & \text{om } \sigma \text{ är okänt.} \end{cases}$$

Exempel: rattfylla?

Exempel: rattfylla? (forts.)

- I Sverige är gränsen för rattfylleri 0.10 milligram alkohol per liter utandningsluft, vilket motsvarar ungefär 0.2 promille i blodet.
- Vid en poliskontroll mäts alkoholhalten hos en persons utandningsluft med mätinstrument som är behäftat med ett $N(0, 0.03)$-fördelat fel*. Den uppmätta alkoholhalten är således en observation från en $N(\mu, 0.03)$-fördelning, där μ är den okända halten.
- Då en man blir stoppad i en poliskontroll görs tre mätningar med medelhalten $\bar{x} = 0.15$ milligram alkohol per liter.

*Modellen är fiktiv!

Exempel: rattfylla? (forts.)

- Konstruera ett nedåt begränsat 99.9%-igt konfidensintervall för μ och välj ett av följande alternativ:
  (a) mannen har med sannolikheten 99.9% inte kört rattfull.
  (b) mannen har med sannolikheten 99.9% kört rattfull.
  (c) man kan inte med sannolikheten 99.9% säga att mannen kört rattfull.

  [svar: (c)]

- Så, bör mannen frias eller fällas?

Idag

Förra gången

Konfidensintervall för σ

Ensidiga konfidensintervall

Två vanliga modeller: oberoende stickprov/stickprov i par

Oberoende stickprov

- Följande modell är ofta användbar. Låt
  - $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ vara oberoende observationer av $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$-fördelade s.v. och
  - $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ vara oberoende observationer av $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$-fördelade s.v.
- Vi vill konstruera ett $(1-\alpha)$-gradigt konfidensintervall för *differensen*

$$\mu_1 - \mu_2.$$

- Vi kommer att titta på två fall:

  (a) σ_1 och σ_2 är kända,

  (b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd.

Oberoende stickprov: σ_1 och σ_2 är kända

- Vi följer åter receptet.

(1) En punktskattning av $\mu_1 - \mu_2$ ges av $\bar{x} - \bar{y}$, ty vi vet att

$$\bar{X} - \bar{Y} \in \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \underbrace{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}_{=D}\right)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{D} \in \mathrm{N}(0,1).$$

(2–3) Genom att gå tillväga precis som tidigare enligt

$$1 - \alpha = \mathbb{P}\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{D} < \lambda_{\alpha/2}\right) = \ldots =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_{\alpha/2} D < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \lambda_{\alpha/2} D\right).$$

(4) erhålls intervallet $\mathrm{I}_{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} D)$.

Oberoende stickprov: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänt

- För att utnyttja båda stickproven vid skattning av den gemensamma variansen σ^2 används den *poolade variansen*

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- S^2 är alltid en väntevärdesriktig skattning av σ^2.
- I normalfördelningsfallet gäller dessutom att $S^2(n_1 + n_2 - 2)/\sigma^2 \in \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$, vilket medför att

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\underbrace{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}_{=d}} \in t(n_1 + n_2 - 2).$$

Två stickprov, sammanfattning

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ och $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ vara slumpmässiga och av varandra oberoende stickprov från två normalfördelningar $N(\mu_1, \sigma_1)$ resp. $N(\mu_2, \sigma_2)$.

(i) *Om σ_1 och σ_2 är kända så är*

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} D),$$

med $D = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$, ett tvåsidigt, $(1-\alpha)$-gradigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

(ii) *Om $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okända så är*

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(k) d),$$

med $d = s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$ och $k = n_1 + n_2 - 2$, ett tvåsidigt, $(1-\alpha)$-gradigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

Sammanfattning: λ- och t- metoderna

- Vi skönjer nu ett generellt mönster för hur man bildar konfidensintervall i normalfördelningsfallet.
- *λ-metoden:* Låt θ^* vara $\mathrm{N}(\theta, D)$-fördelad, där D är känd och θ okänd. Då är

$$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm \lambda_{\alpha/2} D\right)$$

  ett konfidensintervall för θ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- *t-metoden:* Låt θ^* vara $\mathrm{N}(\theta, D)$-fördelad, där θ och D är okända. Låt vidare d vara en punktskattning av D sådan att $(\theta^* - \theta)/d \in t(k)$. Då är

$$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm t_{\alpha/2}(k) d\right)$$

  ett konfidensintervall för θ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

Stickprov i par

- I denna modell studeras n st. objekt.
- På varje objekt mäter man *två gånger*, dvs. före och efter en eventuell förändring hos dessa.
- Antag således att
  - $x_1, x_2, \dots, x_n$ är oberoende observationer av normalfördelade variabler
    $$X_i \in \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_1), \quad i = 1, \dots, n,$$
  - $y_1, y_2, \dots, y_n$ är oberoende observationer av normalfördelade variabler
    $$Y_i \in \mathrm{N}(\mu_i + \Delta, \sigma_2), \quad i = 1, \dots, n,$$
    där Δ representerar förändringen.
- Här kan standardavvikelserna σ_1 och σ_2 vara olika.

Stickprov i par (forts.)

- Trick: vi tittar på *differenserna* $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$, ..., $z_n = y_n - x_n$, vilka är observationer av

$$Z_i = Y_i - X_i \in \mathrm{N}\left(\Delta, \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}_{\overset{\text{not.}}{=} \sigma_z}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

- En skattning av Δ ges av

$$\Delta^* = \bar{Z} \in \mathrm{N}(\Delta, D)$$

där $D = \sigma_z / \sqrt{n}$ är okänd men kan skattas med $d = s_z / \sqrt{n}$.

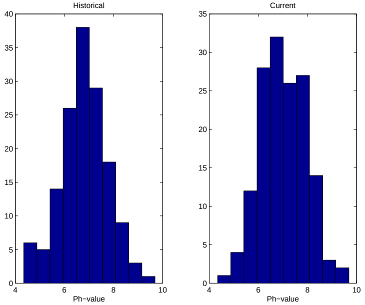
- t-metoden ger direkt det tvåsidiga, $(1 - \alpha)$-gradiga konfidensintervallet

$$\mathrm{I}_\Delta = \left(\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n-1)d\right).$$

Exempel: ph-mätning

Exempel: ph-mätning

- Man mäter ph-värden i $n = 149$ sjöar i Blekinge.
- Baserat på såväl historiska mätningar $x_1, \ldots, x_n$ som nya mätningar $y_1, \ldots, y_n$ från sjöarna vill man undersöka huruvida ph-värdet har ökat.



- Vilken modell passar bäst för den beskrivna situationen?
  (a) Oberoende stickprov,
  (b) stickprov i par.

[svar: (b)]

Exempel: ph-mätning

- Man väljer modellen "stickprov i par", dvs. antar att

$$\begin{aligned} X_i &\in \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_1), \\ Y_i &\in \mathrm{N}(\mu_i + \Delta, \sigma_2), \end{aligned} \quad i = 1, \ldots, n,$$

  och gör ett konfidensintervall för Δ.
- Vilken typ av konfidensintervall bör man bilda i detta fall?
  (a) Tvåsidigt,
  (b) nedåt begränsat,
  (c) uppåt begränsat.

[svar: (b)]

Exempel: ph-mätning

- Matlab-lösning:

```
n = 149;
alpha = 0.05;
z = y - x;
s = std(z);
delta_mean = mean(z);
low_bound = delta_mean - tinv(1 - alpha,n - 1)*s/sqrt(n)

low_bound =

    0.0166
```

- Välj ett av följande alternativ.
  (a) Man kan inte med 95% sannolikhet säga att det skett en ökning av ph-värdet.
  (b) Det har med 95% sannolikhet inte skett en ökning
  (c) Det har skett en ökning med 95% sannolikhet.

[svar: (c)]

Exempel: förpackningar

- En förpackningstillverkare i Lund vill sänka den kraft som krävs för att öppna plastkorken på sina förpackningar (den s.k. *öppningkraften*) genom en förändring i korktillverkningsprocessen. För att testa om förändringen har effekt mäter man, innan förändringen implementerats, öppningskraften på 32* förpackningar. När förändringen implementerats mäter man åter öppningskraften på 32 nya förpackningar.
- Vilken modell passar bäst för den beskrivna situationen?
  (a) Oberoende stickprov,
  (b) stickprov i par.

[svar: (a)]

*alla siffror är påhittade!

Exempel: förpackningar

- En förpackningstillverkare i Lund vill sänka den kraft som krävs för att öppna plastkorken på sina förpackningar (den s.k. *öppningkraften*) genom en förändring i korktillverkningsprocessen. För att testa om förändringen har effekt mäter man, innan förändringen implementerats, öppningskraften på 32 förpackningar med resultatet $\bar{x} = 1.2$ Nm. När förändringen implementerats mäter man åter öppningskraften på 32 nya förpackningar med resultatet $\bar{y} = 1.0$ Nm. Mätinstrumentets precision skattas, med hjälp av båda stickproven, till $s = 0.4$.

Exempel: förpackningar

- Bestäm ett nedåt begränsat, 95%-igt konfidensintervall för skillnaden i öppningskraft och välj ett av följande alternativ.
  (a) Man kan inte med 95% sannolikhet säga att det skett en förbättring (dvs. sänkning av öppningskraften).
  (b) Det har skett en förbättring med 95% sannolikhet.
  (c) Det har med 95% sannolikhet inte skett en förbättring.

[svar: (b)]

Nästa föreläsning

- Approximativa metoder,
- hypotesprövning.