SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 10
29 november 2016

Idag

Mer om punktskattningar

Minsta-kvadrat-metoden (Kap. 11.6)

Intervallskattning (Kap. 12.2)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap. 12.3)

Idag

Mer om punktskattningar

Minsta-kvadrat-metoden (Kap. 11.6)

Intervallskattning (Kap. 12.2)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap. 12.3)

Förra gången: inferensproblemet

- Vi antog att vi hade tillgång till uppmätta värden $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Denna *mätdata* kunde ses som utfall av s.v. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, vilkas fördelning (diskret eller kontinuerlig) berodde av en ev. flerdimensionell *okänd parameter* θ.
- Mängden av möjliga parametrar, *parameterrummet*, betecknades Ω_θ.
- Vi vill skatta θ med hjälp av mätdatan.

Förra gången: punktskattning

- Vi införde följande definition.

Definition

En *punktskattning* av en parameter θ är en funktion θ^* som för varje uppsättning mätdata x_1, x_2, ..., x_n ordnar ett värde i Ω_θ. Detta värde betecknas

$$\theta^*_{\text{obs}} = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Förra gången: punktskattning

- Vi införde följande definition.

Definition

En *punktskattning* av en parameter θ är en funktion θ^* som för varje uppsättning mätdata x_1, x_2, ..., x_n ordnar ett värde i Ω_θ. Detta värde betecknas

$$\theta^*_{\text{obs}} = \theta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Då mätdata ses som utfall av s.v. X_1, X_2, ..., X_n är θ^*_{obs} ett utfall — observation — av *stickprovsvariabeln* $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Den senare betecknas ofta θ^* för enkelhets skull.

Förra gången: punktskattning (forts.)

- Vi tittade även på olika egenskaper hos en punktskattning θ^*, såsom
  - väntevärdesriktighet,
  - konsistens,
  - medelkvadratfel,
  - effektivitet.
- Ovan egenskaper beskriver hur fördelningen för punktskattningen koncentreras kring det sanna parametervärdet θ.
- En väntevärdesriktig skattning med liten varians är bättre!

Medelfel

- Vi använder i regel variansen $\mathbb{V}(\theta^*)$ eller standardavvikelsen $\mathbb{D}(\theta^*)$ för en skattning θ^* som ett mått på dess precision.

Medelfel

- Vi använder i regel variansen $\mathbb{V}(\theta^*)$ eller standardavvikelsen $\mathbb{D}(\theta^*)$ för en skattning θ^* som ett mått på dess precision.
- Ibland kan vi inte bestämma standardavvikelsen $\mathbb{D}(\theta^*)$ då denna beror just på den parameter θ som vi vill bestämma.

Medelfel

- Vi använder i regel variansen $\mathbb{V}(\theta^*)$ eller standardavvikelsen $\mathbb{D}(\theta^*)$ för en skattning θ^* som ett mått på dess precision.
- Ibland kan vi inte bestämma standardavvikelsen $\mathbb{D}(\theta^*)$ då denna beror just på den parameter θ som vi vill bestämma.
- En lösning är då att helt enkelt plugga in skattningen av θ i uttrycket för variansen, vilket ger oss ett *ungefärligt* värde på variansen.

Definition

En skattning av $\mathbb{D}(\theta^*)$ kallas *medelfelet* för θ och betecknas $d(\theta^*)$.

Förra gången: maximum-likelihood-metoden

- Idé: välj det parametervärde som ger högst sannolikhet för den givna mätdatan!

Definition

Funktionen

$$L(\theta) = \begin{cases} p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n; \theta) & \text{(diskreta fallet)}, \\ f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n; \theta) & \text{(kontinuerliga fallet)}, \end{cases}$$

kallas *likelihood-funktionen* (L-funktionen).

Definition

Det värde θ^*_{obs} för vilket $L(\theta)$ antar sitt största värde inom Ω_θ kallas *maximum-likelihood-skattningen* (ML-skattningen) av θ.

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänd och σ känd.
- Varje x_i skulle t.ex. kunna vara en mätning av en konstant μ med ett $\mathrm{N}(0, \sigma)$-fördelat mätfel ε_i, dvs.

$$X_i = \mu + \varepsilon_i.$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänd och σ känd.
- Varje x_i skulle t.ex. kunna vara en mätning av en konstant μ med ett $\mathrm{N}(0, \sigma)$-fördelat mätfel ε_i, dvs.

$$X_i = \mu + \varepsilon_i.$$

- L-funktionen ges av

$$L(\mu) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- I detta fall är det enklare att maximera log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \text{konst. som ej beror av } \mu$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- I detta fall är det enklare att maximera log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 + \text{konst. som ej beror av } \mu$$

genom att lösa

$$\begin{aligned}\frac{d \ln L(\mu)}{d\mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(n\bar{x} - n\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.\end{aligned}$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- I detta fall är det enklare att maximera log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \text{konst. som ej beror av } \mu$$

genom att lösa

$$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}(n\bar{x}-n\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

Man kontrollerar att detta är ett maximum, vilket ger ML-skattningen

$$\mu^*_{\text{obs}} = \bar{x}.$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- Om även σ^2 är okänt ges log-likelihood-funktionen av

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 + \text{konst.}$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- Om även σ^2 är okänt ges log-likelihood-funktionen av

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 + \text{konst.}$$

och att maximera $\ln L(\mu, \sigma^2)$ är ett *tvådimensionellt* optimeringsproblem som visar sig ha lösningen

$$\mu^*_{\text{obs}} = \bar{x},$$

$$(\sigma^2)^*_{\text{obs}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Tillämpning av ML-metoden på normalfördelningen (forts.)

- Om även σ^2 är okänt ges log-likelihood-funktionen av

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 + \text{konst.}$$

och att maximera $\ln L(\mu, \sigma^2)$ är ett *tvådimensionellt* optimeringsproblem som visar sig ha lösningen

$$\mu^*_{\text{obs}} = \bar{x},$$
$$(\sigma^2)^*_{\text{obs}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

- Skattningen av variansen (som ej är väntevärdesriktig) brukar vanligtvis korrigeras enligt

$$(\sigma^2)^*_{\text{obs}} = \frac{1}{\color{red}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s^2.$$

Idag

Mer om punktskattningar

Minsta-kvadrat-metoden (Kap. 11.6)

Intervallskattning (Kap. 12.2)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap. 12.3)

Minsta-kvadrat-metoden

- *Minsta-kvadrat-metoden* (MK-metoden) är ett alternativt sätt att ta fram punktskattningar.
- Låt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vara utfall av oberoende s.v. $X_1, X_2, \dots, X_n$ vars väntevärden är kända sånär som på en okänd parameter θ, dvs.

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu_i(\theta) \quad \text{för } i = 1, \dots, n.$$

- MK-metoden matchar θ efter mätdatan genom att minimera

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \{x_i - \mu_i(\theta)\}^2$$

med avseende på θ.

Exempel: the German tank problem—igen

- Statistisk modell: varje upphittat serienummer x_i, $i = 1, \ldots, n$, ses som ett utfall av en s.v. X_i med likformig fördelning över mängden
$$\{1, \ldots, \theta\},$$
där θ är det okända antalet pansarvagnar. De olika X_i:na kan anses vara oberoende.
- Beräkna MK-skattningen av θ samt bestäm medelfelet!

Exempel: the German tank problem—igen

- Statistisk modell: varje upphittat serienummer x_i, $i = 1, \ldots, n$, ses som ett utfall av en s.v. X_i med likformig fördelning över mängden
$$\{1, \ldots, \theta\},$$
där θ är det okända antalet pansarvagnar. De olika X_i:na kan anses vara oberoende.
- Beräkna MK-skattningen av θ samt bestäm medelfelet!

$$\left[\ \text{svar: } \theta^*_{\text{obs}} = 2\bar{x} - 1, \quad d(\theta^*) = \sqrt{\frac{4\bar{x}(\bar{x}-1)}{3n}}\ \right]$$

Exempel: the German tank problem—igen

- Statistisk modell: varje upphittat serienummer x_i, $i = 1, \ldots, n$, ses som ett utfall av en s.v. X_i med likformig fördelning över mängden
$$\{1, \ldots, \theta\},$$
där θ är det okända antalet pansarvagnar. De olika X_i:na kan anses vara oberoende.
- Beräkna MK-skattningen av θ samt bestäm medelfelet!

$$\left[\ \text{svar: } \theta^*_{\text{obs}} = 2\bar{x} - 1, \quad d(\theta^*) = \sqrt{\frac{4\bar{x}(\bar{x}-1)}{3n}}\ \right]$$

- Jämför med ML-skattningen, vilken ges av $\theta^*_{\text{obs}} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ (se förra gången).

Idag

Mer om punktskattningar

Minsta-kvadrat-metoden (Kap. 11.6)

Intervallskattning (Kap. 12.2)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap. 12.3)

Konfidensintervall

- Dagens definition:

Definition

Låt x_1, x_2, ..., x_n vara utfall av s.v. X_1, X_2, ..., X_n vars fördelning beror av en okänd parameter θ och låt $0 < \alpha < 1$. Ett intervall

$$\mathrm{I}_\theta = (a_1(x_1, \ldots, x_n), a_2(x_1, \ldots, x_n))$$

kallas ett *konfidensintervall för* θ *med konfidensgraden* $1 - \alpha$ om det täcker θ med sannolikheten $1 - \alpha$, dvs.

$$\mathbb{P}(a_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < a_2(X_1, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

- Om både a_1 och a_2 är ändliga kallas intervallet *tvåsidigt*.
- Om antingen $a_1 = -\infty$ eller $a_2 = \infty$ kallas det *ensidigt*.

Konfidensintervall (forts.)

- Vanligtvis väljer man $\alpha \in \{0.05, 0.01, 0.0001\}$.
- Ju mindre α är, desto bredare blir konfidensintervallet.
- Frekvenstolkning: om man gång på gång skulle upprepa datainsamlingen och varje gång konstruera ett, säg, 95%-igt intervall, så kommer ca. 95% av dessa intervall att täcka θ.
- Annorlunda uttryckt: vi använder en metod med vilken vi drar rätt slutsats med sannolikhet $1 - \alpha$.

Allmän metod för konfidensintervall

- Vi kommer att gå till väga enligt följande för att konstruera konfidensintervall:
  (1) Hitta en s.k. *pivotvariabel* $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ vars fördelning inte beror på θ.

Allmän metod för konfidensintervall

- Vi kommer att gå till väga enligt följande för att konstruera konfidensintervall:
  (1) Hitta en s.k. *pivotvariabel* $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ vars fördelning inte beror på θ.
  (2) Hitta kvantiler $x_{\alpha/2}$ och $x_{1-\alpha/2}$ till T så att

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}).$$

Allmän metod för konfidensintervall

- Vi kommer att gå till väga enligt följande för att konstruera konfidensintervall:
  (1) Hitta en s.k. *pivotvariabel* $T(X_1, \dots, X_n; \theta)$ vars fördelning inte beror på θ.
  (2) Hitta kvantiler $x_{\alpha/2}$ och $x_{1-\alpha/2}$ till T så att

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \dots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}).$$

  (3) Lös ut θ enligt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}\left(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \dots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(a_1(X_1, \dots, X_n) < \theta < a_2(X_1, \dots, X_n)\right). \end{aligned}$$

Allmän metod för konfidensintervall

- Vi kommer att gå till väga enligt följande för att konstruera konfidensintervall:
  (1) Hitta en s.k. *pivotvariabel* $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ vars fördelning inte beror på θ.
  (2) Hitta kvantiler $x_{\alpha/2}$ och $x_{1-\alpha/2}$ till T så att
  $$1 - \alpha = \mathbb{P}(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}).$$
  (3) Lös ut θ enligt
  $$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}\left(x_{1-\alpha/2} < T(X_1, \ldots, X_n; \theta) < x_{\alpha/2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(a_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < a_2(X_1, \ldots, X_n)\right). \end{aligned}$$
  (4) Intervallet ges så av $I_\theta = (a_1(x_1, \ldots, x_n), a_2(x_1, \ldots, x_n))$.
- I moment (1) är det lämpligt att utgå från en *punktskattning* av θ.

Idag

Mer om punktskattningar

Minsta-kvadrat-metoden (Kap. 11.6)

Intervallskattning (Kap. 12.2)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap. 12.3)

Fall 1: μ är okänt och σ är känt

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en N(μ, σ)-fördelning, där μ är okänd och σ känd. Vi vill göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

Fall 1: μ är okänt och σ är känt

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en N(μ, σ)-fördelning, där μ är okänd och σ känd. Vi vill göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- Vi följer receptet:
  (1) Som vi sett ges ML-skattningen av μ av (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)

$$\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}(\mu, D) \Leftrightarrow T(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{D} \in \mathrm{N}(0, 1).$$

Fall 1: μ är okänt och σ är känt

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänd och σ känd. Vi vill göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- Vi följer receptet:
  (1) Som vi sett ges ML-skattningen av μ av (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)

$$\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}(\mu, D) \Leftrightarrow T(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{D} \in \mathrm{N}(0, 1).$$

  (2) T:s kvantiler är $\pm\lambda_{\alpha/2}$.

Fall 1: μ är okänt och σ är känt

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänd och σ känd. Vi vill göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- Vi följer receptet:
  (1) Som vi sett ges ML-skattningen av μ av (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)

$$\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}(\mu, D) \Leftrightarrow T(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{D} \in \mathrm{N}(0, 1).$$

  (2) T:s kvantiler är $\pm\lambda_{\alpha/2}$.
  (3) Lös ut μ enligt

$$1-\alpha = \mathbb{P}(-\lambda_{\alpha/2} < T < \lambda_{\alpha/2}) = \mathbb{P}\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{D} < \lambda_{\alpha/2}\right)$$
$$= \mathbb{P}\big(\underbrace{\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} D}_{=a_1(X_1,\ldots,X_n)} < \mu < \underbrace{\bar{X} + \lambda_{\alpha/2} D}_{=a_2(X_1,\ldots,X_n)}\big).$$

Fall 1: μ är okänt och σ är känt

(4) Intervallet ges så slutligen av

$$
\begin{aligned}
I_\mu = (a_1(x_1,\dots,x_n), a_2(x_1,\dots,x_n)) &= (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D) \\
&= \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

Fall 2: både μ och σ är okända

- Låt nu x_1, x_2, ..., x_n vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där *både* μ och σ är okända. Vi vill igen göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

Fall 2: både μ och σ är okända

- Låt nu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där *både* μ och σ är okända. Vi vill igen göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- Vi följer åter receptet:
  (1) Som vi såg tidigare ges ML-skattningen av μ även i detta fall av (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)

$$\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}(\mu, D),$$

  men att använda samma pivotvariabel T som i förra fallet fungerar ej, då resulterande intervall $\mathrm{I}_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ innehåller den okända parametern σ.

Fall 2: både μ och σ är okända

- Låt nu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning, där *både* μ och σ är okända. Vi vill igen göra ett konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- Vi följer åter receptet:
  (1) Som vi såg tidigare ges ML-skattningen av μ även i detta fall av (med $D = \sigma/\sqrt{n}$)

$$\mu^* = \bar{X} \in \mathrm{N}(\mu, D),$$

men att använda samma pivotvariabel T som i förra fallet fungerar ej, då resulterande intervall $\mathrm{I}_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ innehåller den okända parametern σ.

Lösning: använd istället

$$T(X_1, \ldots, X_n; \mu, \sigma) = \frac{\bar{X} - \mu}{d} \in t(n-1),$$

där $d = S\sqrt{n}$ är *medelfelet* och t betyder *t-fördelning*!

Fall 2: både μ och σ är okända (forts.)

(2) T:s kvantiler ges nu av t-fördelningens kvantiler, dvs. $\pm t_{\alpha/2}(n-1)$. Dessa finns i tabell.

Fall 2: både μ och σ är okända (forts.)

(2) T:s kvantiler ges nu av t-fördelningens kvantiler, dvs. $\pm t_{\alpha/2}(n-1)$. Dessa finns i tabell.

(3) Genom samma operationer som tidigare löser vi ut μ enligt

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}(-t_{\alpha/2}(n-1) < T < t_{\alpha/2}(n-1)) \\ &= \mathbb{P}\,(\,\underbrace{\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)d}_{=a_1(X_1,\ldots,X_n)} < \mu < \underbrace{\bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)d}_{=a_2(X_1,\ldots,X_n)}\,)\,. \end{aligned}$$

Fall 2: både μ och σ är okända (forts.)

(2) T:s kvantiler ges nu av t-fördelningens kvantiler, dvs. $\pm t_{\alpha/2}(n-1)$. Dessa finns i tabell.

(3) Genom samma operationer som tidigare löser vi ut μ enligt

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}(-t_{\alpha/2}(n-1) < T < t_{\alpha/2}(n-1)) \\ &= \mathbb{P}\,(\underbrace{\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)d}_{=a_1(X_1,\ldots,X_n)} < \mu < \underbrace{\bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)d}_{=a_2(X_1,\ldots,X_n)}\,). \end{aligned}$$

(4) Slutligen ges intervallet av

$$\begin{aligned} I_\mu = (a_1(x_1,\ldots,x_n), a_2(x_1,\ldots,x_n)) &= (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)d) \\ &= \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Sammanfattning

- Vi sammanfattar de resultat vi funnit i normalfördelningsfallet.

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $N(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänt. Då är

$$\mathrm{I}_\mu = \begin{cases} (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D) & \text{om } \sigma \text{ är känt } (D = \sigma/\sqrt{n}). \\ (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d) & \text{om } \sigma \text{ är okänt } (d = s/\sqrt{n}). \end{cases}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1-\alpha$.

Sammanfattning

- Vi sammanfattar de resultat vi funnit i normalfördelningsfallet.

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara oberoende observationer från en $N(\mu, \sigma)$-fördelning, där μ är okänt. Då är

$$I_\mu = \begin{cases} (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D) & \text{om } \sigma \text{ är känt } (D = \sigma/\sqrt{n}). \\ (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d) & \text{om } \sigma \text{ är okänt } (d = s/\sqrt{n}). \end{cases}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

- Då $\lambda_{\alpha/2} < t_{\alpha/2}(n-1)$, kommer osäkerheten i skattningen av σ att leda till ett bredare intervall i det senare fallet.

W. S. Gosset, alias ''Student''

Figur: William Sealy Gosset (1876–1937) uppfann t-fördelningen i sitt arbete som kemist på bryggerifirman Guinness i Dublin.

t-fördelningen

Definition

Om den s.v. X har täthetsfunktionen

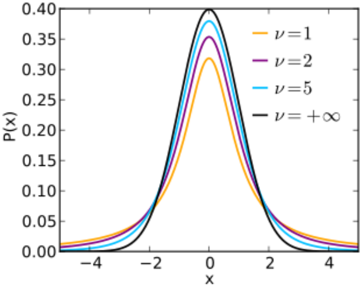
$$f_X(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

där $\nu > 0$, sägs X vara *t-fördelad med ν frihetsgrader* (kodbeteckning: $X \in t(\nu)$).

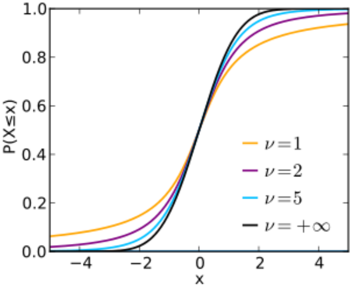
- Vi kommer i det som följer endast att behöva t-fördelningens vanligaste kvantiler, vilka finns tillgängliga i tabell för olika ν.

t-fördelningen (forts.)

(a) Täthetsfunktioner



(b) Fördelningsfunktioner



Figur: Täthets- och fördelningsfunktioner för $t(\nu)$-fördelningar med olika antal frihetsgrader ν. När $\nu \to \infty$ närmar sig $t(\nu)$ normalfördelningen.

Nästa föreläsning

- Konfidensintervall för σ^2,
- approximativa konfidensintervall,
- ...