SF1901: Övningshäfte

24 september 2013

Uppgifterna under rubriken *Övning* kommer att gås igenom under övningstillfällena. Uppgifterna under rubriken *Hemtal* är starkt rekommenderade och motsvarar nivån på tentamen. Om de uppgifterna upplevs som för svåra finns det enklare uppgifter i kursboken. De ligger sist på varje övning under rubriken *Blom*.

5 Övning 5: Kontinuerliga stokastiska variabler

Uppgift 5.1 *a) Bestäm konstanten c så att funktionen*

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 6, \\ 0, & annars, \end{cases}$$

blir en täthetsfunktion.

b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion.

c) Bestäm väntevärde och varians.

Uppgift 5.2 *En stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Beräkna $E(X)$ och $D(X)$.

Uppgift 5.3 *På en gatstump av längden 13 m parkerar en bil av längden 5 m helt på måfå. Vad är sannolikheten att ytterligare en bil av samma längd får plats?*

Uppgift 5.4 *Längden av ett telefonsamtal kan ofta approximativt beskrivas på följande sätt. Sannolikheten att ett samtal varar längre än t minuter är $\exp(-\lambda t)$, där λ är en positiv konstant. Låt den stokastiska variabeln X beskriva samtalstiden för ett telefonsamtal.*

a) Bestäm fördelningsfunktionen för X.

b) Bestäm täthetsfunktionen för X.

c) Beräkna $\mathrm{P}(1 < X \le 10)$ om $\lambda = 2/3$.

Uppgift 5.5 *Epicentrat till en jordbävning hamnar med likformig sannolikhetsfördelning längs en närliggande förkastningsspricka av längden $2a$ km. En damm ligger d km från denna förkastningsspricka enligt figuren. Låt Y vara avståndet från denna till jordbävningens epicentrum. Bestäm täthetsfunktionen för Y. (lägg till figur)*

5.1 Hemtal 5

Uppgift 5.6 *a) Om den stokastiska variabeln* X *är* $U(0,1)$*, bestäm täthetsfunktionen för* $\sqrt{X}$.

b) Om den stokastiska variabeln X *är* $U(-1,1)$*, bestäm täthetsfunktionen för* X^2.

Uppgift 5.7 *a) Om radien på en cirkel är exponentialfördelad med parameter* r*, bestäm täthetsfunktionen för cirkelns area.*

b) Om radien på en sfär är exponentialfördelad med parameter r*, bestäm täthetsfunktionen för sfärens volym.*

Uppgift 5.8 *En komplicerad utrustning för automatisk styrning av en produktionsprocess innehåller bland annat 200 elektroniska komponenter. Tiden tills en enskild komponent går sönder beskrivs av en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde 10 år. Antag att olika komponenter går sönder oberoende av varandra.*
För en ny utrustning, bestäm sannolikheten att mer än 15% av de ursprungliga komponenterna har gått sönder (och därför blivit utbytta) inom ett år.

Uppgift 5.9 *Väntetiden i timmar till nästa driftstopp för en basstation i ett mobilnät modelleras som en exponentialfördelad stokastisk variabel* X *med parametern* m*, dvs.* $X \in Exp(m)$*. Av erfarenhet vet de driftansvariga att* $\mathrm{P}(X \leq 1.0) = 0.01$*. Beräkna* $\mathrm{P}(X \leq 2.0)$.

Uppgift 5.10 *Till en fabrik levereras komponenter från två underleverantörer A och B. Komponenter från leverantör A har livslängder som beskrivs av exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde 5.8 år medan motsvarande från leverantör B är exponentialfördelade med väntevärde 7.2 år. Vidare så kommer 70% av komponenterna i fabrikens lager från leverantör B. En komponent väljs ut på måfå ur fabrikens lager och man noterar i ett accelererat försök att komponenten inte har gått sönder under motsvarande 8 års tid. Bestäm sannolikheten att den valda komponenten kommer från underleverantör A.*

Blom: 7.16, 7.25, 3.12, 5.3, 5.12, 5.13, 7.6, 7.9ab, 7.15a, 7.17, 3.14, 3.22, 3.29, 5.7, 7.14

6 Övning 6: Flerdimensionella stokastiska variabler

Uppgift 6.1 *X är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen $p_X(k)$ given av tabellen nedan. Y är en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktionen $p_Y(k)$*

k	1	2	3
$p_X(k)$	1/3	1/2	1/6

given av tabellen nedan. X och Y är dessutom oberoende.

k	1	2	3
$p_Y(k)$	2/3	1/6	1/6

a) Bestäm sannolikheten $\mathrm{P}(X+Y=4)$.

b) Bestäm den betingade sannolikheten $\mathrm{P}(X \leq 2 | X+Y=4)$.

Uppgift 6.2 *Två personer A och B har stämt möte på ett kafé litet efter klockan åtta". A anländer X minuter över åtta och B anländer Y minuter över åtta. Antag nu att X är $U(0{,}4)$ och Y är $U(0{,}6)$. X och Y antas oberoende. Vad är sannolikheten att A får vänta på B?*

Uppgift 6.3 *Två oberoende stokastiska variabler X_1 och X_2 är båda exponentialfördelade med väntevärde 2. Låt $U = \max(X_1, X_2)$ och $V = \min(X_1, X_2)$ vara den största respektive minsta av dessa variabler. Beräkna $E(U - V)$.*

Uppgift 6.4 *En julgransbelysning består av 20 seriekopplade lampor. Belysningens brinntid är lika med brinntiden tills första lampan slocknar. Antag att lampornas brinntider är oberoende och exponentialfördelade med parametern λ. Låt Y vara belysningens brinntid. Bestäm täthetsfunktionen för Y.*

Uppgift 6.5 *De stokastiska variablerna X och Y är oberoende och har täthetsfunktionerna*

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= 2e^{-2x}, \quad x > 0, \\
f_Y(y) &= 3e^{-3y}, \quad y > 0.
\end{aligned}
$$

Bestäm täthetsfunktionen för $X + Y$.

6.1 Hemtal 6

Uppgift 6.6 *De stokastiska variablerna X och Y är oberoende och likformigt fördelade i intervallet $(0{,}a)$. Beräkna fördelningsfunktionen för Z_+ och Z_- där*

$$
Z_+ = \max(X{,}Y), \quad Z_- = \min(X{,}Y).
$$

Uppgift 6.7 *De stokastiska variablerna X och Y är oberoende med sannolikhetsfunktioner enligt nedan: Man gör ett försök och får därvid observationen $X+Y=4$. Beräkna den härav betingade sannolikheten för att $X=2$.*

k	$p_X(k)$	$p_Y(k)$
1	0.2	0.4
2	0.3	0.4
3	0.5	0.2

Uppgift 6.8 *De tid (i minuter) som det tar för en terränglöpare att ta sig runt en bana är en stokastisk variabel X med täthetsfunktionen*

$$f_X(x) = \frac{125 - x}{450}, \quad 95 \leq x \leq 125.$$

Hur stor är sannolikheten att av åtta olika löpare, vars tider är oberoende, efter 100 minuter

a) alla har kommit i mål?

b) ingen har kommit i mål?

Uppgift 6.9 *De stokastiska variablerna X och Y är oberoende, X är $Bin(10{,}0.1)$ och Y är $Bin(5, 0.1)$. Sätt $Z = X + 2Y$. Beräkna*

a) väntevärde och varians för Z,

b) $\mathrm{P}(Z = 2)$.

Uppgift 6.10 *Den s.v. $(X{,}Y)$ har täthetsfunktionen*

$$f_{X,Y}(x{,}y) = \frac{1 + x + y + cxy}{c + 3} \cdot e^{-(x+y)}, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

a) Beräkna $f_X(x)$.

b) Det finns precis ett värde på c sådant att X och Y är oberoende. Vilket?

Uppgift 6.11 *Bestäm täthetsfunktionen för $Z = X + Y$ om X och Y är oberoende och har täthetsfunktionerna*

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0,$$
$$f_Y(y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Blom: 4.1, 4.16, 4.19, 4.5, 4.12, 4.21

7 Övning 7: Väntevärden

Uppgift 7.1 *De stokastiska variablerna X_1, X_2 och X_3 är oberoende, alla med väntevärdet 2 och standardavvikelsen 3. Sätt $Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3 - 6$. Bestäm $E(Y)$ och $D(Y)$.*

Uppgift 7.2 *Två studenter vill utöka sin kassa genom att placera 1.000 kronor i varsin aktieportfölj. De har tillsammans hittat tio stycken aktier som de tycker verkar vara vettiga att satsa sina pengar i den kommande tiden. För varje aktie är dess värde om ett år stokastiskt och för alla de tio aktierna kan detta värde anses ha samma väntevärde $\mu = 100$ och standardavvikelse $\sigma = 24$. Eftersom de tio bolagen är verksamma inom olika branscher kan man i en förenklad modell anta att de olika aktiernas värde om ett år är oberoende av varandra. Priset för varje aktie idag är 100 kronor.*

Den ena studenten, A, har identifierat en aktie som han tror väldigt mycket på och han tänker satsa alla sina pengar på denna. Den andra studenten, B, har ingen sådan favorit och vill istället satsa lika mycket pengar, 100 kronor, på var och en av de tio aktierna.

a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för värdet av de två aktieportföljerna om ett år. Standardavvikelse kan i det här sammanhanget tolkas som risk. Vilken av de båda portföljerna har lägst risk? Hur kan det förklaras?

b) Betrakta istället situationen där några av företagen verkar inom samma bransch. Antag att fem företag verkar inom samma bransch och att korrelationen mellan värdet, om ett år, av deras aktier är 0.5. Värdet av de återstående fem företagens aktier antas fortfarande oberoende av varandra och av dessa fem. Utför samma beräkningar som i a). Skillnader?

Uppgift 7.3 *En kontinuerlig stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c(e^x - 1), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Bestäm konstanten c samt beräkna $E(X)$.

Uppgift 7.4 *Som en mycket förenklad modell för golfbolls luftfärd (utan hänsyn till luftmotstånd, skruv osv) antar vi att om bollen lämnar marken med hastigheten Z, i 45 graders vinkel, så slår den i marken en sträcka Z^2/g längre bort. Här är g tyngdaccelerationen (9.81 m/s^2). Vidare antas bollens utgångshastighet vara lika med den hastighet med vilken klubban träffar bollen.*

Golfaren kan naturligtvis inte exakt kontrollera hastigheten i slaget. Antag att hastigheten på klubbladet i träffögonblicket kan ses som en stokastisk variabel med väntevärdet 35 m/s och standardavvikelsen 5 m/s. Beräkna den förväntade längden på slaget.

Uppgift 7.5 *(Svår) I ett livsmedelspaket ligger till glädje för alla barn ett plastdjur. Sex olika djur ingår i serien. Djuren tillverkas i samma antal och placeras slumpmässigt i de tillverkade paketen. Beräkna väntevärdet $E(X)$ av antalet paket man behöver köpa för att få en fullständig serie.*

7.1 Hemtal 7

Blom: 5.17, 5.16, 5.18, 5.29, 5.31, 6.5, 6.6

8 Övning 8: Normalfördelningen, Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

Uppgift 8.1 *X är $N(0{,}1)$. Bestäm*

a) $P(X \leq 1.82)$,

b) $P(X \leq -0.35)$,

c) $P(-1.2 < X < 0.5)$,

d) a så att $P(X > a) = 5\%$,

e) a så att $P(|X| < a) = 95\%$.

Uppgift 8.2 *X är $N(5{,}2)$. Bestäm*

a) $P(X \leq 6)$,

b) $P(1.8 < X < 7.2)$,

c) a så att $P(X \leq a) = 5\%$.

Uppgift 8.3 *X, Y och Z är oberoende normalfördelade stokastiska variabler, $E(X) = 2$, $E(Y) = 1$ och $E(Z) = 0$. Alla har varians 2. Beräkna* $P(4X - 3Y > 5Z)$.

Uppgift 8.4 *En hiss i ett varuhus är markerad med "högst 10 personer eller 800 kg". Personvikten i kg hos en slumpvis uttagen vuxen varuhuskund kan antas vara $N(70{,}10)$. Vad är sannolikheten för att 10 vuxna personer överlastar hissen enligt det andra av de två belastningskriterierna?*

Uppgift 8.5 *Vid lastning av malm i en järnvägsvagn avviker den verkliga lastens vikt slumpmässigt från det nominella värdet 10 ton och kan ses som utfall av en stokastisk variabel med väntevärdet 10 och standardavvikelse 0.5. Bestäm approximativt sannolikheten för att totallasten i ett tågsätt om 25 vagnar överskrider 255 ton. Lasterna i olika vagnar förutsätts vara stokastiskt oberoende.*

Uppgift 8.6 *Ett bostadsområde för 1000 familjer planeras. Sannolikheterna för att en familj har inget, ett, två respektive tre barn i förskoleåldern antas vara 0.4, 0.2, 0.3, 0.1. Antalet barn i olika familjer förutsätts oberoende. Hur många daghemsplatser skall planeras om sannolikheten för att alla barn ska få daghemsplats skall vara 90%?*

8.1 Hemtal 8

Uppgift 8.7 *I affärer avrundas numera det totala priset till närmaste krona. Detta innebär att felet för varje kunde kan anses vara likformigt fördelat på intervallet $(-0.5, 0.5)$. Under en dag handlar 500 personer i en viss affär.*

Beräkna sannolikheten för att kassans avvikelse från det inslagna beloppet under dagen i affären ovan är mer än 5 kr. Lämpliga och välmotiverade approximationer är tillåtna.

Uppgift 8.8 *Låt den stokastiska variabeln X vara $N(5, 4)$. Beräkna* $P(X \leq 8 | X \geq 3)$.

Uppgift 8.9 *En tunnel av längd 170 m skall borras från två håll. Av erfarenhet tror man sig veta att vad som hinns med olika dagar från ett håll kan uppfattas som oberoende observationer av en stokastisk variabel med väntevärde 5.0 m och standardavvikelse 1.2 m.*

Beräkna med lämplig approximation (som skall motiveras) sannolikheten att det tar längre tid än 18 dagar att borra tunneln.

Uppgift 8.10 *Den stokastiska variabeln* X *är* $N(0,1)$*-fördelad. Beräkna fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln* $Y = \Phi(X)$*, där* $\Phi(\cdot)$ *är fördelningsfunktionen för* X*. Motivera noggrant!*

Uppgift 8.11 *Vid en läkarmottagning kallas 25 patienter till ett visst klockslag. Behandlingstiden för en patient betraktas som ett utfall av en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde* m *minuter. Patienterna behandlas en i taget och olika patienters behandlingstider är oberoende stokastiska variabler. Av erfarenhet vet man att läkaren 1 gång på 10 klarar av att inom en timme behandla samtliga 25 patienter. Tolka detta som en sannolikhet och bestäm* m*. Rimliga och välmotiverade approximationer är tillåtna.*

Uppgift 8.12 *En maskin fyller på vätska på flaskor i ett bryggeri. Kontrollmätningar har visat att den påfyllda volymen kan betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde* m *och standardavvikelse* $\sigma = 4$ *ml, där* m *kan ställas in av maskinens operatör. På flaskornas etikett står det att innehållet är 330 ml.*

a) Hur bör m *väljas för att sannolikheten att en flaska ska få ett innehåll mindre än 330 ml är 0.1?*

b) Flaskorna ställs i backar med 20 st i varje. Om man väljer $m = 332$ *ml vid påfyllningen, hur stor är då sannolikheten för att en back skall innehålla mindre än 6600 ml vätska? (Vätskemängderna i olika flaskor är oberoende av varandra.)*

Blom: 6.15, 7.28, 7.26, 6.14, 6.16, 6.23, 7.15b

Svar

Övning 5

5.1 a) $c = 1/72$, b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3/216, & 0 \le x \le 6, \\ 1, & x \ge 6, \end{cases}$ c) $\mathrm{E}(X) = 9/2$, $\mathrm{V}(X) = 27/20$,
5.2 $\mathrm{E}(X) = 3/4$, $\mathrm{V}(X) = \sqrt{3/80}$,
5.3 $3/4$,
5.4 a) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$, b) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$, c) $e^{-2/3} - e^{-20/3} = 0.5121$,
5.5 $f_Y(x) = \begin{cases} x/(a\sqrt{x^2 - d^2}), & d < x < \sqrt{a^2 + d^2}, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$
5.6 a) $f_Y(x) = 2x$, $0 \le x \le 1$, b) $f_Y(x) = 1/(2\sqrt{x})$, $0 \le x \le 1$,
5.7 a) $f_A(x) = \frac{r}{2\sqrt{\pi x}} \cdot e^{-r\sqrt{x/\pi}}$, $x > 0$, b) $f_V(x) = \frac{r}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{3x}\right)^{2/3} \cdot e^{-r\left(\frac{3x}{4\pi}\right)^{1/3}}$, $x > 0$.
5.8 0.00475,
5.9 0.0199,
5.10 0.24685.

Övning 6

6.1 a) $1/4$, b) $5/9$,
6.2 $2/3$,
6.3 2,
6.4 $f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 20\lambda e^{-20\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$
6.5 $f_{X+Y}(z) = 6(e^{-2z} - e^{-3z})$ om $z > 0$,
6.6 $F_{Z_+}(z) = (z/a)^2$, om $0 \le z \le a$, $F_{Z_-}(z) = (2z/a) - (z/a)^2$, om $0 \le z \le a$. Funktionerna är 0 och 1 för lägre respektive högre z-värden.
6.7 $1/3$,
6.8 a) $(11/36)^8 = 0.0000760$, b) $(25/36)^8 = 0.0541$,
6.9 a) 2.7, b) 0.23,
6.10 a) $f_X(x) = \frac{2+(c+1)x}{c+3} e^{-x}$ om $x > 0$, b) $c = 1$,
6.11 $f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ e^{-z}(e-1) & z \ge 1. \end{cases}$

Övning 7

7.1 $\mathrm{E}(Y) = -2$, $\mathrm{D}(Y) = 3\sqrt{14}$,
7.2 a) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 1000$, $\mathrm{D}(A) = 240$, $\mathrm{D}(B) = 24\sqrt{10} \approx 76$, b) $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 1000$, $\mathrm{D}(A) = 240$, $\mathrm{D}(B) = 24\sqrt{20} \approx 107.33$.
7.3 $c = 1/(e-1)$, $\mathrm{E}(X) = 1/(e-1)$,
7.4 127.4 m,
7.5 $6\sum_{k=1}^{6} 1/k = 14.7$.

8.2 Övning 8

8.1 a) $\Phi(1.82) \approx 0.966$, b) $1 - \Phi(0.35) \approx 0.363$, c) $\Phi(0.5) + \Phi(1.2) - 1 \approx 0.576$, d) $\lambda_{0.05} \approx 1.64$, e) $\lambda_{0.025} \approx 1.96$,
8.2 a) $\Phi(0.5) \approx 0.691$, b) $\Phi(1.1) + \Phi(1.6) - 1 \approx 0.810$, c) $5 - 2\lambda_{0.05} \approx 1.71$,
8.3 $\Phi(0.5) \approx 0.691$,
8.4 $1 - \Phi(\sqrt{10}) \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$,
8.5 $\approx 1 - \Phi(2) \approx 0.023$,
8.6 $\approx [1100 + \lambda_{0.10} \cdot \sqrt{1090} + 1] = 1143$, där $[\cdot]$ = heltalsdelen.
8.7 $\approx 2(1 - \Phi(0.78)) \approx 0.44$,
8.8 ≈ 0.6723,
8.9 ≈ 0.082,
8.10 $Y \in \mathrm{U}(0,1)$,
8.11 $m = 0.053066$ timmar,
8.12 a) 335.13, b) 0.0126.