SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 7
Normalfördelning. Linjärkombination av oberoende normalfördelade s.v. Centrala gränsvärdessatsen.

Tatjana Pavlenko

17 september 2015

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Linjära kombinationer av s.v.: repetition (Kap. 5.5)
- Stora talens lag: repetition (Kap. 5.6)
- Standardiserad och allmän normalfördelning (Kap. 6.2-6.3)
- Linjärkombinationer av oberoende normalfördelade s.v. (Kap. 6.5)
- Centrala gränsvärdessatsen och normalfördelningsapproximation (Kap. 6.7)

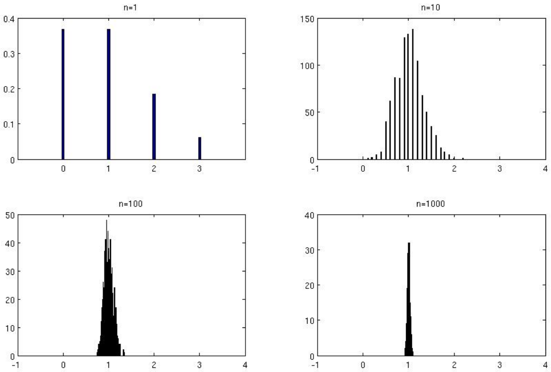
KTH Matematik

Stora talens lag (rep.)

- Sats: Låt $X_1, X_2, \dots$ vara en följd av oberoende (likafördelade) s.v., alla med samma väntevärde $E(X_i) = \mu$ och std $D(X_i) = \sigma < \infty$. Låt
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots X_n)$$
vara medelvärdet av de n första variablerna. Då gäller, för godtyckligt $\varepsilon > 0$, att
$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

- Detta säger att s.v $\bar{X}_n$, bestående av medelvärdet av de n s.v. $X_1, \dots, X_n$ har en fördelning som koncentrerar sig runt $\mu = E(X_i)$.

STORA TALENS LAG (REP.)



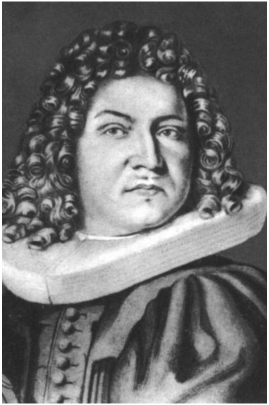
FIGUR : Sannolikhetsfunktionen för medelvärdet $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots X_n)/n$, där de enskilda observationerna är $Po(1)$, för $n = 1, 10, 100$ och 1000. Den diskreta fördelningen koncentreras alltmer runt värdet 1, dvs väntevärdet.

Stora talens lag (rep.)

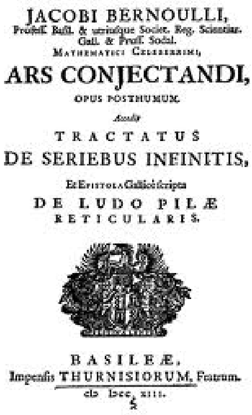
- *Tolkning:* medelvärde är en bra uppskattning av väntevärde!
- *Stora talens lag är en av grundstenarna inom empirisk vetenskap.* Om man gör många oberoende observationer av någon s.v., t ex hållfastheten hos en metall, blodtrycket hos patienter behandlade med en ny medicin, eller livslängden hos personer i ett försäkringskollektiv, då kommer medelvärdena av dessa observationer att ligga nära det *sanna* väntevärdet.
- *Om vi inte vet det sanna väntevärdet kan vi gissa, eller skatta väntevärdet med medelvärdet.* Detta förhållande är en viktig ingridiens i staistik delen av kursen.

Stora talens lag (från fls. 6).

- Stora talens lag är ett av de viktigaste resultaten inom sannolikhetsteorin.
- Denna lag, först formulerad av den schweiziske matematikern Jacob Bernoulli (1654–1705), utsäger att *aritmetiska medelvärdet av flera oberoende s.v. med samma väntevärde* μ *ligger nära* μ, bara antalet är tillräckligt stort.



STORA TALENS LAG (FRÅN FLS. 6)


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

FIGUR : Jacob Bernoulli grundlade sannolikhetsläran med den postumt utgivna *Ars Conjectandi (Konsten att gissa* (1713)) där de stora talens lag presenteras för första gången.

Normalfördelning

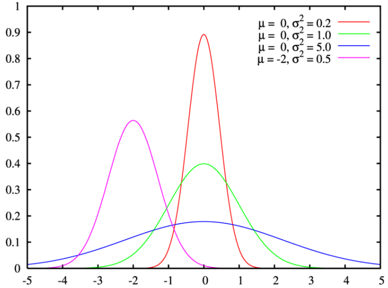
- Normalfördelningen, den viktigaste av alla fördelningar, är även kallad *Gauss-fördelningen* och *klockkurvan*. Benämningen Gauss-fördelning hänsyftar på den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855).
- Def: En kontinuerlig s.v. X sägs vara *normalfördelad* med parametrar μ och σ, $(\sigma > 0)$ om täthetsfunktionen ges av

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- Beteckning: $X \in N(\mu, \sigma)$.
- Anm. Det finns en normalfördelning för varje par μ och $\sigma > 0$. Å andra sidan, givet μ och $\sigma > 0$ så är fördelningen helt preciserad och har täthet som ovan.

KTH Matematik

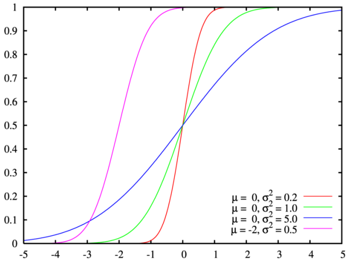
Normalfördelning: täthetsfunktion.



Figur : Täthetsfunktionen för en $N(\mu, \sigma)$-fördelning för några olika värden på μ och σ.

- Effekten av att ändra μ: täthetensläge försjuts.
- Effekten av att ändra σ: fördelning blir mer koncentrerad när σ är liten, respektive mer utspridd när σ är stor.

Normalfördelning: fördelningsfunktion.



Figur : Fördelningsfunktionen för en $N(\mu, \sigma)$-fördelning för några olika värden på μ och σ.

- Fördelningsfunktionen $F_X(x)$ ges av

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- Denna integral har inget slutet uttryck. För givna μ, σ och x kan den beräknas numeriskt.

Standardiserad normalfördelning.

- Def: En normalfördelad s.v. Z med parametrar $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ sägs vara *standardiserad normalfördelad*, $Z \in N(0,1)$.
- Täthetsfunktionen $f_Z(z)$ och fördelningsfunktionen $F_Z(z)$ för Z har egna beteckningar, $\phi(z)$ respektive $\Phi(z)$ och definieras av

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty,$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Vi ska se senare att det räcker att kunna räkna ut dessa funktioner för att kunna beräkna $F_X(x)$ för en godtycklig normalfördelning.

STANDARDISERAD NORMALFÖRDELNING: EGENSKAPER.

- $\phi(-z) = \phi(z), \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- Areatolkning och numeriska exempel på tavlan.
- För $Z \in N(0,1)$ gäller att

$$P(a < Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

  Eftersom fördelningen är kontinuerlig kan man byta $\leq$ mot $<$ eller omvänt utan att sannolikheten ändras.
- Kvantiler för $N(0,1)$ förekommer så ofta att dessa gets en egen beteckning, λ_α.
- Def: α-kvantilen, λ_α, för en standardiserad normalfördelning definieras som lösningen till $P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha$. Men $P(Z > \lambda_\alpha) = 1 - \Phi(\lambda_\alpha)$ så λ_α löser tydligen

$$\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha.$$

KTH Matematik

- *Om $Z \in N(0,1)$ så gäller att*

$$E(Z) = 0, \quad D(Z) = 1.$$

Bevis: Eftersom $\phi(\cdot)$ är symmetrisk kring 0 så får man

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0.$$

- För att få $D(Z)$ använder vi Stas 5.6: $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$. Genom partiell integration fås

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= -z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 + 1 = 1.$$

KTH Matematik

- Sats: $X \in N(\mu, \sigma)$ om och endast om $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$.
- Tolkning av μ och σ. Enligt sats får vi

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu = \mu,$$

$$V(X) = V(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 E(Z) = \sigma^2,$$

  dvs är parametrarna μ och σ *väntevärde* respektive *standardavvikelse* för $N(\mu, \sigma)$-fördelad s.v.
- Vidare gäller att

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- Kort ex på tavlan!

KTH Matematik

- Användbarhet av resultat ovan.
- Exempel: Vid en industri produceras järnbalkar som väger 2000 kg. Vikten för en enskild balk kan beskrivas av en normalfördelning med $\mu = 2000$ kg och $\sigma = 2.3$ kg.

  A) De balkarna som avviker med mer än 5 kg från avsedd vikt efterbehandlas för att få en vikt närmare 2000 kg. Bestäm andelen balkar som behöver efterbehandlas.
  (Svar: 0.030)

  B) Bestäm sannolikheten att en balk väger mindre än 1997 kg.
  (Svar: 0.0968)

  C) Bestäm sannolikheten att en balk väger mer är 2007 kg.
  (Svar: 0.0012)

- I statistiska sammanhang vill man ofta ange symmetriska intervall så att $Z \in N(0,1)$ ligger inom intervallet med en förutbestämd sannolikhet. Exempel: vilket tal $z > 0$ som gör att

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0.95?$$

- Lösning till detta kan uttryckas med hjälp av kvantiler: z måste ges av $\lambda_{0.025} = 1.96$ och $-z$ blir $-\lambda_{0.025} = -1.96$. Bild med $\phi(z)$ på tavlan.
- Allmänna förmeln: för $Z \in N(0,1)$ gäller att

$$P(-\lambda_{\alpha/2} \leq Z \leq \lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

- För en godtycklig $X \in N(\mu, \sigma)$ kan man uttrycka α-kvantilen x_α med hjälp av motsvarande kvantil λ_α för den standardiserade $Z \in N(0,1)$: $P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha$.
- Vi söker x_α som satisfierar $P(X > x_\alpha) = \alpha$.

$$P(X > x_\alpha) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z \in N(0,1)} > \underbrace{\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}}_{\lambda_\alpha}\right) = P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha.$$

- Detta ger $x_\alpha = \mu + \sigma\lambda_\alpha$.
- Dessutom

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

eller

$$P\left(\mu - \sigma\lambda_{\alpha/2} \leq X \leq \mu + \sigma\lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Linjär transformation av normalfördelning

- En viktig egenskap hos normalfördelningen är att den *bevaras under linjära transformationer*.
- Sats: Om $X \in N(\mu, \sigma)$, så gäller att

$$Y = aX + b \in N(a\mu + b, |a|\sigma).$$

- Sats: Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende och respektive $N(\mu_1, \sigma_1), N(\mu_2, \sigma_2), \ldots, N(\mu_n, \sigma_n)$ och konstanterna $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ är givna, så gäller att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \in N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}\right).$$

- Speciellt, om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende $N(\mu, \sigma)$ och $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ samt $b = 0$, så gäller att

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \in N(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

Centrala gränsvätdessatsen (CGS).

- Satsen är den viktigaste resultaten inom sannolikhetsteorin:

  En summa av oberoende lika fördelade s.v. med godtycklig fördelning är ungefär normalfördelad, bara antalet komponenter i summan är tillräkligt stort.

- Sats (CGS): Låt $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ vara en oändlig följd av oberoende, likafördelade s.v. med väntevärde μ och och standardavvikelse $0 < \sigma < \infty$. Sätt

  $$Y_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

  Då gäller för givna $a < b$ att

  $$P\left(a < \frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) \longrightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{då } n \to \infty.$$

- CGS uttalar sig alltså om *fördelningen av Y_n då antalet n växer mot oändligheten*: Y_n är ungefär $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$-fördelad. Beteckning:

  $$Y_n \in AsN(n\mu, \sqrt{n}\sigma).$$

KTH Matematik

Centrala gränsvätdessatsen (forts.)

- Observera att $E(Y_n) = n\mu$ och $D(Y_n) = \sqrt{n}\sigma$. För varje givet n är

$$\frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

  en standardiserad s.v. Den har väntevärde lika med noll och standardavvikelse lika med 1 som en standardiserad normalfördelad s.v.

- Enligt CGS: när n går mot oändligheten kommer hela fördelningen för den angivna standardiserade s.v. att gå mot en *standardiserad normalfördelning*, dvs

$$\frac{Y_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \in AsN(0, 1).$$

KTH Matematik

- Följdats: För en oändlig följd av oberoende likafördelade s.v. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ med $E(X_i) = \mu$ och $D(X_i) = \sigma$ $(0 < \sigma < \infty)$ gäller att

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \in AsN\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

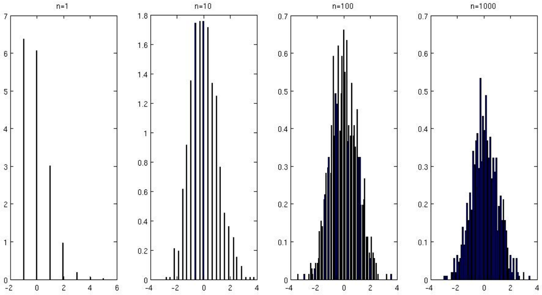
  dvs *aritmetisk medelvärdet $\bar{X}_n$ är approximativt normalfördelat för tillräckligt stort n*.

- Normalfördelningsapproximation. Enligt CGS: $\sum_{i=1}^{n} X_i \in AsN(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ och $\bar{X}_n \in AsN\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$. Detta ger approximationerna

$$P\left(a < \sum_{i=1}^{n} X_i \leq b\right) \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

$$P\left(c < \bar{X}_n \leq d\right) \approx \Phi\left(\frac{d - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Centrala gränsvätdessatsen (forts.)



Figur : Fördelningen (sannolikhetsfunktion) för $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ för $n = 1$, $n = 10$, $n = 100$ och $n = 1000$, där

$$\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$$

och $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ är oberoende $Po(1)$-variabler (så att $\mu = \sigma = 1$). Då $n \to \infty$ liknar sannolikhetsfunktionen alltmer den standardiserade normalfödelningstäthet.