SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 11
Intervallskattning.

Tatjana Pavlenko

1 oktober 2015

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Vad är en intervalskattning? (rep.)
- Den allmäna metoden för att konstruera ett konfidensintervall (rep.)
- Tillämpning på normalfördelning: Intervallskattning för σ i $N(\mu, \sigma)$.
- Mer om situationer med normalfördelade data: två stickprov. Konfidenintervall för differens mellan olika väntevärden.
- Stickprov i par. (Kap. 12-3 (d))

Vad är en intervallskattning? (rep.)

Ett alternativt (till punktskattning) sätt att redovisa skattningen är att bestämma ett *intervall* som innehåller det sanna (verkliga) parametervärdet med t ex sannolikheten 0.95. Några exempel:

- Livslängden hos en bil ligger mellan 12 och 15 år med sannolikheten 0.95.
- Andelen väljare som röstar på socialdemokraterna är mellan 35% och 39% med sannolikheten 0.90.
- Antalet samtal till telefonväxel är mellan 15 och 18 per minut med sannolikheten 0.99.
- Standardavvikelsen för en viss laboratoriemättning är mellan 1.5 och 2 mg med sannolikheten 0.95.

Intervallskattning (rep.)

Förra föreläsningen definierades ett konfidensintervall en okänd parameter θ:

- Def: Låt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vara utfall av ett slumpmässigt stickprov $X = (X_1, \ldots, X_n)$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ och låt $0 < \alpha < 1$. Ett intervall,

$$I_\theta = (a_1(x),\, a_2(x))$$

kallas ett *konfidensintervall* för θ med *konfidensgrad* $1 - \alpha$ om den innehåller θ med sannolikhet $1 - \alpha$, dvs

$$P\left(a_1(X) < \theta < a_2(X)\right) = 1 - \alpha.$$

- Konfidensgränserna, $a_1(x)$ och $a_2(x)$ är observationer av stickprovsvariabler, $a_1(X)$ och $a_2(X)$. Ett konfidensintervall $I_\theta = (a_1(x),\, a_2(x))$ kan alltså betraktas som *en observation* av ett intervall med stokastiska gränser.

Den allmäna metoden för att konstruera ett konfidensintervall för en okänd parameter θ kan beskrivas i följande steg:

1. Skriv upp parameter att skatta (θ) och hitta punktskattare θ^*.
2. Bestäm punktskattares fördelning.
3. Transformera punktskattare till en ny stokastisk variabel, $T(X)$ vars fördelning inte beror på några okända parametrar, i.e. en *pivot*.
4. Stäng in den transformerade s.v. $T(X)$ mellan kvantilerna t_α i dess kända fördelning:

$$1 - \alpha = P(t_{1-\alpha/2} < T(X) < t_{\alpha/2})$$

5. Skriv om i olikheten så att θ blir instängd i stället. Då ar

$$I_\theta = (a_1(x), a_2(x))$$

ett konfidensintervall för θ med konfidensgrd $1 - \alpha$.

Tillämpning på normalfördelning (rep.)

Konfidensintervall för μ i $N(\mu, \sigma)$: samafattning av λ- och t-metoden.

- Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$ där μ är okänd. Då

  om σ är känd:

$$I_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

  om σ är okänd:

$$I_\mu = (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

  där kvantilerna ges av

  - $\lambda_{\alpha/2}$ är $N(0,1)$-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 2)
  - $t_{\alpha/2}(n-1)$ är t-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 3)

- Man kan också göra konfidensintervall för σ och σ^2 i $N(\mu, \sigma)$. För detta behöver vi en ny fördelning.

STICKPROVSFÖRDELNINGAR.

I samband med stickprov från $N(\mu, \sigma)$ uppträder några (nya) fördelningar som vi behöver för att kunna hantera konfidensintervall.

- Sats: *Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$. Då gäller följande:*

$$\mu^* = \bar{X} \in N(\mu, D),\ D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1),$$

samt $\bar{X}$ och S är oberoende.

- Sats: *Låt $X \in N(\mu, \sigma)$ och $Y \in \chi^2(f)$ vara oberoende s.v. Då gäller följande:*

$$\frac{X}{\sqrt{Y}/\sqrt{f}} \in t(f).$$

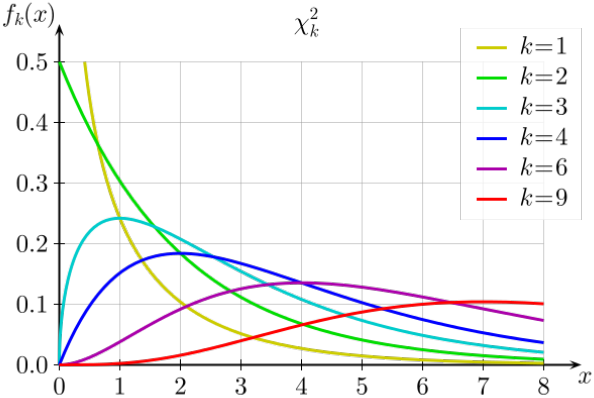
- Nästa sats ger samband mellan $N(\mu, \sigma)$, χ^2 och t-fördelningar:
- Sats: *Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende $N(\mu, \sigma)$-fördelare s.v. så gäller att*

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1).$$

- Båda χ^2 och t-fördelningar förekommer som fördelningar för pivotvariabler vid stickprov från normalfördelningar.

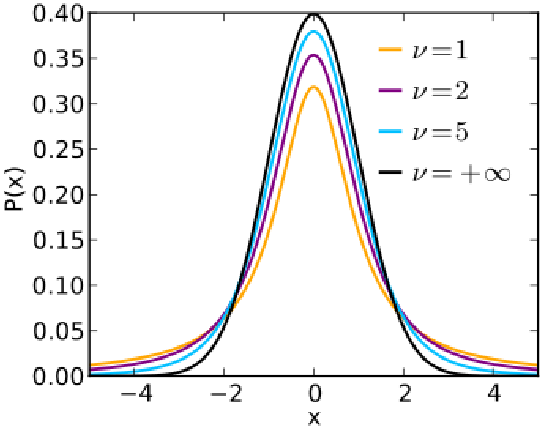
KTH Matematik

χ^2-FÖRDELNING.



FIGUR : Exempel på täthetsfunktionen för χ^2-fördelning med olika antal frihetsgrader $k = n - 1$.

t-FÖRDELNING.



FIGUR : Exempel på täthetsfunktionen för t-fördelning med olika antal frihetsgrader $\nu = n - 1$.

KONFIDENSINTERVALL FÖR σ.

Exempel: konfidensintervall för σ i $N(\mu, \sigma)$, steg 1-3 på tavlan.

4.

$$P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right) = 1-\alpha.$$

5. Med detta erhålls I_σ i följande

   Sats: *Låt $x_1, \dots, x_n$ vara uttfall av ett slumpmässigt stickprov fråm $N(\mu, \sigma)$. Då ges konfidensintervall för σ med konfidensgraden $1-\alpha$ av*

   $$I_\sigma = (sk_1,\, sk_2),$$

   där

   $$k_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}.$$

KTH Matematik

Två oberoende stickprov: Konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

I många praktiska situationer är det viktigt att kunna jämföra väntevärden i två olika grupper. Några exempel:

- Är två stållegeringar lika?
- Är en viss ny medicin bättre än den gamla?
- Är nätverk A mer effktivt än nätverk B?

Följande modell är användbar för sådana jämförelser: vi antar att

- $x_1, \ldots, x_{n_1}$ är oberoende observationer av s.v med $N(\mu_1, \sigma_1)$-fördelning och
- $y_1, \ldots, y_{n_2}$ är oberoende observationer av s.v med $N(\mu_2, \sigma_2)$-fördelning.

Vi vill härleda konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$, och delar upp analysen i två olika fall:

1. σ_1 och σ_2 är kända.
2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd.

- För båda fall går vi tillväga enligt steg 1-5: (talan). De erhållna intevallen sammanfattas i förljande
- Sats: (sats 12.3) *Låt $x_1, \ldots, x_{n_1}$ och $y_1, \ldots, y_{n_2}$ vara slumpmässiga, av varandras oberoende stickprov från $N(\mu_1, \sigma_1)$ respektive $N(\mu_2, \sigma_2)$.*
  - *Om σ_1 och σ_2 är kända erhålls ett tvåsidigt $1-\alpha$ konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med*

$$I_{\mu_1-\mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} D), \quad D = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}.$$

  - *Om $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ och är okänd så är*

$$I_{\mu_1-\mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) d), \quad d = s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2},$$

$$s = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}.$$

Q_1 och Q_2 är kvadratsummorna kring respektive stickprovsmedelväraden och $f = (n_1-1)+(n_2-1)$.

Stickprov i par.

Idé: Man vill undersöka effekten av blodtryckssänkande medicin. Två möjliga försöksupplägg:

1. *En grupp om 10 personer* får medicinen och *en annan grupp* om 10 personer får placebo.

Man kan använda $I_{\mu_1-\mu_2}$ för två oberoende stickprov. **Problem**: Stora skillnader mellan personernas blodtryck och liten skillnad beroende på om man har placebo eller medicin!

2. Mät blodtrycket *före* och *efter* behandling på en grupp om 10 pers.

Man kan göra sig av variationen mellan individer och istället fokusera på variation som orsakas av medicin!

Slutsats: *Om mätvärdena hör ihop parvis använder man modellen stickprov i par*!

Ex: Två vågar, A och B. Man misstänker att B har systematiskt fel så att det ger förhögt värde, medan A har rätt i medeltal.

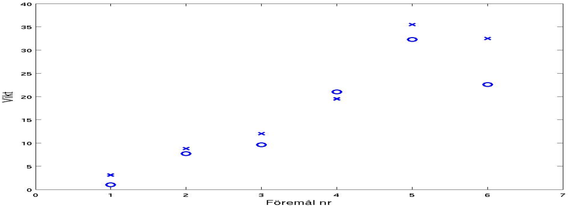
Modell.

$$\begin{aligned} &\text{Våg } A: \quad X_i \in N(\mu_i, \sigma_1). \\ &\text{Våg } B: \quad Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2), \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n.$

Man vägde 6 föremål på båda vågarna för att bestämma I_Δ.

STICKPROV I PAR.



Figur: Upmätta vikter för A(o) och B(x). Stor skillnad mellan de olika observationer men liten skillnad mellan A och B varför stickprov i par är lämpligt.

Objekt, i	1	2	3	4	5	6	Obs. av
A, x_i	1.0	7.7	9.6	21.0	32.3	22.6	$X_i \in N(\mu_i, \sigma_1)$
B, y_i	3.1	8.8	12.0	19.5	35.5	35.5	$Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$
$z_i = y_i - x_i$	2.1	1.1	2.4	-1.5	3.2	9.9	$Z_i \in N(\Delta, \sigma)$

Konfidensintervall för Δ på tavlan!

KTH Matematik