Uppräkneligt eller numrerbart oändlig

En mängd A for vilken det finns en en-entydig tillordning mellan dess element och de naturliga talen kallas uppräknelig eller numrerbar.

Sats: *De rationella talen är uppräkneliga.*

Bevis. Varje rationell tal $\frac{m}{n}$, där m och n är relativt prima (dvs inte har några gemensamma faktorer) kan tillordnas talet $2^m 3^n$ och tvärtom. Det ger en en-entydig tillordning av de rationella talen till en delmängd av de naturliga talen eftersom två tal av typen $2^m 3^n$ inte kan vara lika om inte deras exponenter m respektive n är lika. Ordnar man talen $2^m 3^n,\ m, n$ relativt prima, i storleksordning, kan det första tillordnas talet 1, det andra talet 2 osv. På så sätt erhåller vi också en en-entydig tillordning mellan de rationella talen och de naturliga.

Vad gäller då för mängden av de reella talen?

Sats: *De reella talen är ej uppräkneliga.*

Bevis. Antag att så är fallet. Då är naturligtvis talen mellan 0 och 1 också uppräkneliga och det finns en uppräknelig lista av dessa. Låt denna vara

$$\begin{array}{l} 0.x_{11}x_{12}\ldots x_{1j}\ldots \\ 0.x_{21}x_{22}\ldots x_{2j}\ldots \\ \qquad\vdots \\ 0.x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ij}\ldots \\ \qquad\vdots \end{array}$$

där $0.x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ij}\ldots$ är decimalbråksutvecklingen av det i:te talet, $i = 1, 2, \ldots$. Nu konstruerar vi ett nytt tal $y = 0.y_1y_2\ldots y_i\ldots$ där (t.ex) $y_i = 1$ om $x_{ii} \neq 1$ och $y_i = 2$ om $x_{ii} = 1$. Då har vi sett till att den i:te decimalen i y och den i:te decimalen i det i:te talet i listan blir olika. Det innebär att y är skild från det i:te talet i listan för alla i och därmed skild från alla talen i listan. Talet y är inte med i uppräkningen vilket är en motsägelse. De reella talen är inte uppräkneliga.

Bevistekniken ovan kallas diagonaliseringsförfarande och är en vanlig teknik vid studier av *kardinalitet*. Två mängder sägs ha samma kardinalitet om det finns en en-entydig tillordning mellan deras element. De kan då i viss mening sägas vara lika stora.