Tillstånd som kommunicerar har samma period

Bevis: Vi låter $d_i$ och $d_j$ vara perioderna för $i$ och $j$. Vi skall alltså visa att $d_i = d_j$ om $i$ och $j$ kommunicerar. Perioden för ett tillstånd är som bekant största gemensamma faktor i de ”utflyktslängder” som man kan göra från tillståndet.

Att $i$ och $j$ kommunicerar (dvs $i \leftrightarrow j$) innebär att det finns tal $r$ och $s$ så att $p_{ij}^{(r)} > 0$ och $p_{ji}^{(s)} > 0$. Detta betyder att $p_{ii}^{(r+s)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{ji}^{(s)} > 0$ enligt Chapman-Kolmogorovs sats. Alltså är $r + s$ en möjlig ”utflyktslängd” från $i$. Detta innebär att perioden $d_i$ för $i$ måste dela $r + s$ (perioden måste ju dela alla ”utflyktslängder” dvs speciellt $r + s$).

Om vi nu tittar på $p_{ii}^{(r+s+n)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(s)}$ så ser man att om $p_{jj}^{(n)} > 0$ så måste $p_{ii}^{(r+s+n)} > 0$. Om alltså $n$ är en utflyktslängd för $j$ måste alltså $d_i$ dela $r + s + n$. Vi såg ovan att $d_i$ delar $r + s$ och alltså måste $d_i$ dela ett sådant $n$. Denna överläggning visar alltså att $d_i$ måste dela alla utflyktslängder för $j$.

De överhuvudtaget tänkbara utflyktslängderna för $j$ är $d_j, 2d_j, 3d_j \cdots$ där $d_j$ är perioden för $j$. Vissa av dessa är kanske inte möjliga utflyktslängder för $j$, men låt de verkliga utflyktslängderna vara $k_1 d_j, k_2 d_j, k_3 d_j, \cdots$. Dessa heltal $k_1, k_2, k_3, \cdots$ kan inte ha någon gemensam faktor annat än 1 eftersom $d_j$ är största gemensamma faktor av dessa tänkbara utflyktslängder $k_1 d_j, k_2 d_j, k_3 d_j, \cdots$. Vi vet alltså att $p_{jj}^{(k_1 d_j)}, p_{jj}^{(k_2 d_j)}, p_{jj}^{(k_3 d_j)}, \cdots$ alla är $> 0$, men då vet vi att $d_i$ delar alla dessa tal $k_1 d_j, k_2 d_j, k_3 d_j, \cdots$. Eftersom $k_1, k_2, k_3, \cdots$ saknade gemensamma faktorer (annat än 1) måste alltså $d_i$ dela $d_j$. På samma sätt inser man (byt $i$ och $j$ i ovanstående resonemang) att $d_j$ måste dela $d_i$. Alltså är $d_i = d_j$!