KTH Matematik
Lars Filipsson

Matematik fördjupning
Inlämningsuppgifter 3

1. Låt $Z(x)$ vara den funktion som kallas Zenons trappa och som definieras i Pughs bok på sidan 161. Visa att $Z(x)$ är integrerbar på $[0,1]$.

2. Låt $Z(x)$ vara som i föregående uppgift. Visa att

$$\int_0^1 Z(x)dx = \frac{2}{3}.$$

3. Låt $f : [0,1] \to [0,1]$ vara kontinuerlig och anta att $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0,1]$. Vad kan du säga om f inte säkert är kontinuerlig?

4. Låt f_n vara en följd kontinuerliga funktioner från ett metriskt rum M till ett metriskt rum N. Anta att följden f_n konvergerar likformigt mot en funktion f. Visa att f är kontinuerlig (börja med att skriva ner en definition av vad likformig konvergens ska betyda i ett allmänt metriskt rum).

5. Kan det hända att punktvis konvergens är ekvivalent med likformig konvergens? För reellvärda funktioner av en reell variabel har vi sett att begreppen inte är ekvivalenta, men det finns ju fler metriska rum än $\mathbf{R}$...

6. Betrakta funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[0,1]$. Finn en partition P sådan att $U(f,P) - L(f,P) < 1/4711$. Samma uppgift med $1/4711$ utbytt mot ϵ.

7. Visa att potensserierna $\sum c_n(x-a)^n$ och $\sum c_n n(x-a)^{n-1}$ har samma konvergensradie.

8. Enligt Pugh så definieras i vissa diffoint-böcker integralen av en funktion f på intervallet $[a,b]$ som

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_{n_k}) \frac{b-a}{n}$$

där c_{n_k} är mittpunkten i intervallet $[a+(k-1)(b-a)/n, a+k(b-a)/n]$. Visa att om f är kontinuerlig så existerar detta gränsvärde och det är lika med Riemannintegralen av f.

9. Ge ett exempel som visar att gränsvärdet I från föregående uppgift kan existera för funktioner som inte är Riemann-integrerbara. Slutsats?

10. Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

11. Låt $h(x) = 0$ för $x \leq 0$ och $h(x) = e^{-1/x}$ för $x > 0$. Visa att funktionen h är kontinuerlig på $\mathbf{R}$ och har derivator av alla ordningar överallt.

12. Visa att funktionen h från föregående uppgift inte är analytisk. Tips: hur ser Taylorserien i origo ut?

13. Visa att funktionen g definierad genom att $g(x) = 1$ för alla rationella x och $g(x) = 0$ för alla irrationella x inte är Riemann-integrerbar på intervallet $[0, 1]$.

14. Låt g vara som i föregående uppgift. Visa att mängden av alla $x \in [0, 1]$ sådana att $g(x) = 1$ är en nollmängd (dvs en mängd som för varje $\epsilon > 0$ kan täckas över med uppräkneligt många intervall av sammanlagd längd mindre än ϵ). Argumentera för att det skulle vara rimligt att integralen av g över intervallet $[0, 1]$ existerade och var lika med noll. (Det finns ett integralbegrepp (Lebesgue-integralen) för vilket detta är sant.)

15. Anta att funktionen f är Riemann-integrerbar på intervallet $[a, b]$ och att det finns ett tal $m > 0$ sådant att för alla x i intervallet gäller att $|f(x)| \geq m$. Visa att funktionen $1/f(x)$ är integrerbar.

16. Anta att $\sum a_k$ konvergerar och att $\sum |a_k|$ divergerar. Låt L vara ett godtyckligt reellt tal. Visa att det finns en bijektion $n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sådan att $\sum a_{n(k)}$ konvergerar mot L. Dvs: en betingat konvergent serie kan fås att konvergera mot vilket tal som helst genom att man summerar termerna i en annan ordning.

17. Låt $f(x) = x$ och låt för varje positivt heltal n funktionen f_n vara definierad genom

$$f_n(x) = \frac{x^2 + (n^2 + 1)x + 1/n^2}{n^2 + x}.$$

Visa $f_n \to f$ likformigt på $[0, 1]$.

18. Beräkna $lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^2 + (n^2 + 1)x + 1/n^2}{n^2 + x} dx$. Tips: använd resultatet från föregående uppgift!

19. Låt $C[0,1]$ vara mängden av alla kontinuerliga reellvärda funktioner definierade på $[0,1]$. Visa att

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

är en metrik på $C[0,1]$.

20. Med samma beteckningar som i föregående uppgift: är det sant att $f_n \to f$ likformigt på $[0,1]$ om och endast om $f_n \to f$ i metriken d?