KTH Matematik
Lars Filipsson

Matematik fördjupning
Inlämningsuppgifter 2

1. Låt $p > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Visa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |x|^p = 0.$$

2. Antag att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är sådan att $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$ för alla x, y. Vad kan du dra för slutsatser om f på grundval av detta?

3. Antag att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är deriverbar och $f'(a) < y < f'(b)$. Visa att det finns $x_0 \in (a, b)$ sådant att $f'(x_0) = y$ genom att sätta $g(x) = f(x) - xy$ och argumentera för att g' måste ha ett nollställe. Måste därför f' vara kontinuerlig?

4. Anta att f är två gånger deriverbar i en omgivning av x. Visa att

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

(För högre betyg svara också på följande: antag bara att f är definierad i en omgivning av x och att gränsvärdet ovan existerar - följer det av detta att $f''(x)$ existerar?)

5. Visa med hjälp av derivatans definition att $D\sqrt{x} = 1/(2\sqrt{x})$.

6. Anta att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och att $f'(x)$ existerar för alla $x \neq 0$ och att $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1$. Vad kan du säga om $f'(0)$?

7. Låt $f(x) = |x|^3$. Beräkna $f'(x)$ och $f''(x)$ och visa att $f^{(3)}(0)$ inte existerar.

8. Visa att en kontinuerlig $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ är likformigt kontinuerlig (dvs att man givet ϵ kan välja ett δ i definitionen för kontinuitet som funkar för alla punkter) genom att tänka så här: antag att f inte är likformigt kontinuerlig, då finns något $\epsilon > 0$ och följder (x_n) och (y_n) sådana att $|x_n - y_n| < 1/n$ och $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \epsilon$, och härled en motsägelse från detta.

9. Visa att varje kontinuerlig $f : [a, b] \to [a, b]$ har en fixpunkt, dvs ett x sådant att $f(x) = x$.

10. Anta att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är definierad genom att $f(x) = 0$ för alla irrationella x och $f(x) = 1/n$ för rationella $x = m/n$ där m och n är heltal utan gemensam faktor. Visa att f är kontinuerlig i alla irrationella punkter och diskontinuerlig i alla rationella punkter.

11. Anta att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ antar alla mellanliggande värden, dvs $f(a) < y < f(b) \implies f(x) = y$ för nåt x mellan a och b. Måste då f vara kontinuerlig? För högre betyg: hur blir det om du dessutom antar att det för varje $r \in \mathbf{Q}$ gäller att $\{x \in \mathbf{R} : f(x) = r\}$ är sluten?

12. Låt $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ vara deriverbar. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? Bevis eller motexempel!
A. $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$ implicierar att f är strängt växande.
B. f strängt växande implicerar att $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$.

13. Leta reda på formelsamlingen som delas ut i samband med det nationella provet för gymnasiets kurs D (www.umu.se/edmeas/np/information/np-tidigare-prov.html). Se till att du kan bevisa samtliga formler som står där. (Behöver inte lämnas in skriftligt)

14. Anta att en deriverbar $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller att $f'(x) \neq 1$ för alla x. Visa att f har högst en fixpunkt.

15. Anta att en deriverbar $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uppfyller att det finns ett tal $M < 1$ sådant att $|f'(x)| \leq M$ för alla x. Visa att f har exakt en fixpunkt. För högre betyg: visa att fixpunkten är gränsvärdet av talföljden $(f^n(a))_{n \in \mathbf{N}}$ där a är godtyckligt och f^n är sammansättningen $f \circ f \circ \cdots \circ f$ av f med sig själv n gånger. För ännu högre betyg: visa att varje kontraktion på ett fullständigt metriskt rum har en unik fixpunkt.

16. Hur många olika bevis för Taylors formel kan du?

17. Låt $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara definierad som följer: $f(x) = 0$ för $x \leq 0$ och $f(x) = e^{-1/x}$ för $x > 0$. Bevisa att f har derivator av alla ordningar överallt. Hur ser Taylorutvecklingen i origo ut? Varför är detta exempel intressant?

18. Låt $a > 1$ och $x_0 > \sqrt{a}$. Låt $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$, för varje positivt heltal n. Visa att följden (x_n) är monoton och att att $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. För högre betyg: om ϵ_n är felet man gör när man approximerar $\sqrt{a}$ med x_n, dvs $\epsilon_n = x_n - \sqrt{a}$, säg något om hur snabbt detta fel går mot noll när n går mot oändligheten.

19. Låt $a > 1$ och $x_0 > \sqrt{a}$. Låt $x_n = \dfrac{a + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$, för varje positivt heltal n. Visa att $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$, till exempel genom att visa att delföljden (x_{2k}) är växande och delföljden (x_{2k+1}) är avtagande. För högre betyg: om δ_n är felet man gör när man approximerar $\sqrt{a}$ med x_n, säg något om hur snabbt detta fel går mot noll när n går mot oändligheten.

20. Låt $a > 1$ och låt för positiva x

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right), \qquad g(x) = \frac{a+x}{1+x}.$$

Bestäm eventuella fixpunkter till dessa funktioner. För högre betyg: Förklara med hjälp av f' och g' varför konvergensen är så mycket snabbare i uppgift 18 än i uppgift 19.