5B1212 VT05
KTH Matematik
Hans Thunberg

Inlämningsuppgift 1

Instruktioner

Denna uppgift kan ge maximalt 2 B-bonuspoäng till den avslutande tentan.

Uppgiften syftar till att komplettera framställningen av teorin för homogena linjära differentialekvationer. Framställningen i läroboken i kapitel 4.1 och 8.1 är kortfattad, och de flesta bevis utlämnas. I nedanstående uppgifter ska du reflektera över och komplettera denna framställning på en punkt.

Du skall skriva arbetet självständigt. Naturligtvis får du söka hjälp i litteraturen och i diskussioner med dina kamrater, men var och en skall formulera sina egna bevis.

Texten skall skrivas som en sammanhållen framställning med fullständiga meningar. Införda beteckningar skall definieras. Texten skall vara väl läsbara för studenter med förkunskaper jämförbara med dina egna.

Att kopiera text från kamrater, litteraturen, webben eller dylikt är absolut inte tillåtet, och betraktas som fusk.

Uppgiften kommer eventuellt att diskuteras muntligen vid ett senare tillfälle. Var och en som deltar i inlämningsuppgiften skall då vara beredd att muntligen redogöra för sina lösningar.

Din skriftliga lösning skall lämnas till övningslärare Martin Bender, och vara honom tillhanda senast fredag 22 april 2005.

* * *

Inledning

Uppgiften berör frågor kring följande sats.

Sats (Thm 8.4 i ZC): *Låt* $I = (a, b)$, $a < b$ *, vara ett intervall på reella axeln. Låt* $\mathbf{A}(t) = (a_{i,j}(t))$ *vara den* $n \times n$ *matris som har element* $a_{i,j}(t)$ *, och antag att funktionerna* $a_{i,j}(t)$, $1 \le i, j \le n$ *, samtliga är kontinuerliga på intervallet* I .

Då har det homogena ekvationssystemet

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}$$

n *stycken linjärt oberoende lösningar* $\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots \mathbf{X}_n(t)\}$ *på intervallet* I .

Uppgifter

1. Hela avsnitt 8.1 i läroboken handlar ju om system av första ordningens linjära differentialekvationer i allmänhet, under vilka förutsättningar lösningar till sådana system existerar, när lösningen är entydigt bestämd, och om lösningarnas struktur.

Reflektera kortfattat (ett korrekt svar behöver inte vara mer än några meningar långt) över ovanstående sats roll i detta teoribygge. Varför har man tagit med denna sats? Fyller den en viktig roll i teorin? Skulle den övriga framställningen i avsnitt 8.1 stå sig lika bra utan denna sats? (½ B-poäng)

2. I avsnitt 4.1 i läroboken behandlas teorin för högre ordningens linjära ordinära differentialekvationer. Denna teori är i själva verket ett specialfall av teorin för linjära system i avsnitt 8.1.

Exemplifiera detta genom att bevisa att Thm 4.4 i Zill-Cullen följer av Thm 8.4; du kan om du vill begränsa dig till fallet med en andra ordningens ekvation.
Beviset skall vara fullständigt och noggrant genomfört. (1 B-poäng)

3. Bevisa Theorem 8.4. Du kan om du vill begränsa dig till fallet $n = 2$.

(Tips: Beviset utnyttjar bl.a. Theorem 8.1 och Theorem 8.3) (½ B-poäng)