FOURIERTRANSFORMEN OCH FOURIERINTEGRALER.
FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR 5B1212, CL2, HT 2004

HANS THUNBERG

Innehåll

Date: 18 november 2004.

Detta kompendium utgör en kompletterande text till Zill-Cullen *Differential Equations with Boundary Value Problems*. I kapitel 11 i Zill-Cullen behandlas Fourierkoefficienter och Fourierserier för periodiska funktioner. Här nedan skall vi se hur icke-periodiska funktioner på ett analogt sätt kan beskrivas med *Fouriertransformer* och *Fourierintegraler*. Vi skall också diskutera hur Fourierkoefficienter och Fouriertransformer beskriver *frekvensinnehållet* in en signal (=funktion). Detta är en aspekt som har viktiga tillämpningar inom signalteorin vid t.ex. bildanalys, bildbehandling, akustik, ljudbearbetning, spektroskopi etc.

I Zill-Cullen behandlas väsentligen Fourierserier på reell form, dvs. serier vars termer är reella trigonometriska funktioner. Vi börjar vår framställning med att ge en delvis ny formulering av dessa reella Fourierserier, och inför också Fourierserier på komplex form, där termerna utgörs av komplexa exponentialfunktioner. Detta är ett mer kompakt skrivsätt, som också underlättar generaliseringen till Fourietransformer och Fourierintegraler.

I kapitel 14 i Zill-Cullen finns en kort introduktion till Fourietransformer och Fourierintegraler, men den avviker delvis från vedertagen standard (speciellt är definitioner och beteckningar i konflikt med framställningen i detta kompendium), och har också ett något annat fokus än nedanstående. Ett varningens ord är också på sin plats: I litteraturen förekommer många olika beteckningskonventioner, som skiljer sig åt genom olika val av av symboler men också olika normeringar. Definitionerna och notationen nedan är alltså inte den enda allmänt förekommande, men håller sig i vart fall till några av de vanligaste konventionerna.

1. Funktioner och signaler

En viktig tillämpning av Fourieranalysen är inom signalteorin. Vi kommer i vissa exempel nedan att knyta an till detta. Med en signal menar vi en funktion $f(t)$ med viss regularitet, definierad på ett ändligt intervall eller hela reella axeln. För att beskriva signaler som är momentana pulser, utan tidslig utsträckning, används också s.k. *Dirac-pulser*, som inte är funktioner i vanlig mening, utan exempel på s.k. *generaliserade funktioner* (eller *distributioner*)(Avsnitt 5.3–5.4).

Variabeln t tänker vi på som en tidsvariabel, och $f(t)$ utgör signalens momentana amplitud (utsvängning). Närmast till hands är kanske att tänka på elektriska signaler, $f(t)$ kan då utgöra den momentana strömen eller spänningen i en viss mätpunkt vid tiden t. Man kan också tänka på akustiska signaler (ljud), då $f(t)$ kan representera *ljudtrycket*, dvs. avvikelsen från normalt lufttryck, i en viss punkt vid tiden t.

2. Fourierserier

2.1. Fourierserier - Periodiska signaler och deras frekvensinnehåll. Vi har sett (Zill-Cullen *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, kap. 11) hur periodiska funktioner kan skrivas som serier av sinus- och cosinusfunktioner: Om $f(t)$ är periodisk med period $T > 0$, dvs $f(t+T) = f(t)$ för alla reella tal t, och om f t.ex. är kontinuerlig och deriverbar överallt gäller att

$$f(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos\frac{2\pi n}{T}t + b(n)\sin\frac{2\pi n}{T}t \tag{1}$$

där

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\,dt, \\ a(n) &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}t\,dt, \\ b(n) &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Formlerna här ser lite annorlunda ut än i läroboken. För det första har vi betonat att koefficienterna är *funktioner av* n genom att skriva $a(n)$ snarare än a_n. För det andra har vi gjort oss av med bindningen till origo-symmetriska interval $(-p, p)$, och utgår istället från ett godtyckligt interval $(d, d+T)$ av längd T. Vi lämnar som en övning att visa att (1) och (2) är ekvivalent med framställningen i Zill-Cullen.

Kommentar. En funktion f defininerad på ett interval $J = (d, d+T)$ ger naturligt upphov till en T-periodisk funktion g på reella axeln: Definiera $g(t) = f(t)$ för $t \in J$, och utvidga sedan T-periodiskt. g är då definierad för alla $t \neq d + nT$, $n \in \mathbb{Z}$. Funktionerna f och g kommer då att ha samma Fourierserie (eller också saknar de båda Fourierserier). Fourieseriens värde i punkterna $t = d + nT$ ges av medelvärdet av g:s höger- och vänstergränsvärde i dessa punkter. Uppenbart är också att en T-periodisk funktion g på reella axeln ger upphov till en funktion f, med samma Fourieserie som g, på varje interval $J = (d, d + T)$. När vi talar om Fourieserier är det därför ekvivalent att tala om funktioner definierade på ett interval $J = (d, d + T)$ och om T-periodiska funktioner.

2.1.1. *Period, frekvens och vinkelfrekvens.* Om en funktion f är periodisk med period $\tau > 0$ är den också periodisk med perioden $n\tau$ för varje positivt heltal n. Exempelvis gäller att $\cos t = \cos(t + 2\pi)$ för alla t, men också att $\cos t = \cos(t + 4\pi) = \cos(t + 6\pi) = \ldots$. Vi vill kunna skilja ut den kortaste perioden såsom varande den fundamentala, och gör därför följande definition.

Definition 1. Vi säger att f har den *fundamentala perioden* T, om det finns ett minsta positiva tal T sådant $f(t + T) = f(t)$ för alla reella tal t. Vidare definierar vi f:s *grundfrekvens* $\Phi = 1/T$, som talar om hur många perioder (grundsvängningar) som förlöper per tidsenhet. Det visar sig vara beteckningsmässigt fördelaktigt att arbeta med en omskalad frekens. Vi definierar *grundvinkelfrekvensen* till f som $\Omega = 2\pi\Phi = 2\pi/T$. Beteckningarna T, Φ och Ω reserveras i dessa anteckningar för dessa betydelser, och när vi talar om en funktions period T, frekvens Φ eller vinkelfrekvens Ω, syftar vi på den fundamenatla perioden respektive grund(vinkel)frekvensen, om inte annat sägs. Om vi vill betona att dessa storheter hör till en funktion f skriver vi T_f, Φ_f och Ω_f.

Kommentar. Observera att den n:te trigonometriska termen $a(n)\cos\frac{2\pi n}{T}t+b(n)\sin\frac{2\pi n}{T}t$ i (1) har fundamentalperiod $T_n = T/n$, grundfrekvens $\Phi_n = n/T$ och grundvinkelfrekvens $\Omega_n = 2n\pi/T$ dvs. den “hinner med” precis n st. hela perioder på ett interval $J = (d, d + T)$. Speciellt har den första termen fundamentalperiod T.

Om vi substituerar f:s (grund)vinkelfrekvensen Ω i (1) och (2) får vi

$$f(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos n\Omega t + b(n)\sin n\Omega t. \tag{3}$$

där

Funktionen f kan alltså skrivas som en konstantterm + sinus- och cosinussvängningar med vinkelfrekvenser som är heltalsmultiplar f:s grundvinkelfrekvens Ω. Koefficienterna $a(n)$ och $b(n)$ talar om “hur mycket” vi har av vinkelfrekvensen $\omega_n = n\Omega$ i funktionen $f(t)$. Se vidare Övning 2.5 här nedan för en precisering av detta.

Detta blir speciellt suggestivt om vi tänker på f som en periodisk signal, eller en ton, där $f(t)$ är den momentana svängningsamplituden vid tiden t.

2.1.2. *Fourierserier och övertoner.* Ljud når våra öron genom svängningar i lufttrycket. Det vi uppfattar som en ton svarar mot en periodisk svängning. Med språkbruket ovan är en ton alltså en periodisk signal $f(t)$, där $f(t)$ beskriver variationerna i lufttrycket vid våra trumhinnor. (Vi bortser från hur svängningarna fortplantar sig genom luften). Svängningens grundfrekvens $\Phi = \Omega/2\pi$ är den frekvens vi uppfattar som tonhöjden. Ett ett-struket a exempelvis är en svängning med $\Phi = 440$ Hz, vilket alltså är ekvivalent med att svängningen $f(t)$ är periodisk med $T = 1/440$ sekund.

Ekvation (3) säger i detta sammanhang att tonen kan delas upp i en grundton, som är en trigonometrisk svängning med frekvens Φ och övertoner med trigonometriska svängningar med frekvenser 2Φ (den första övertonen), 3Φ (den andra övertonen) osv. Grundtonen och övertonernas relativa styrka (storleksförhållendena på koefficienterna) ger tonen dess klangfärg. Olika musikinstrument karakteriseras bl.a av olika så kallade övertonsspektra.

Eftersom en fördubbling av frekvensen svarar mot att höja tonen en oktav, utgörs den första övertonen av den ton som ligger en oktav över grundtonen. Den andra övertonen har frekvensförhållandet $3/2$ till den första övertonen, det svarar mot att den andra övertonen ligger en kvint över den första övertonen.

Detta är en förenklad framställning. En ton varierar ju över tiden: den slås an och klingar ut, och klangfärgen (=övertonsspektrat) ändrar sig under detta förlopp. Detta innebär bl.a. att signalen (tonen) i egentlig mening inte är periodisk, då ju periodisk per definition betyder ett förlopp som pågår och har pågått i all evighet. Likväl är ovanstående en någorlunda korrekt bild om vi begränsar oss till att tänka på korta fragment av en ton.

2.2. **Övningar.**

Övning 2.1. Övertyga dig om (1) och (2) är ekvivalent med formlerna i Zill-Cullen om (i) f är en T-periodisk funktion med $T = 2p$ eller om (ii) f är den $T = 2p$-periodiska utvidningen av en funktion definierad på intervallet $(d, d+T)$.

Övning 2.2. Bestäm Fourierkoefficienterna och Fourierserien till den 2-periodiska utvidgningen av funktionen

$$f(x) = 1 + x, \quad 2 < x < 4.$$

Övning 2.3. En signal $f(t)$ är periodisk med perioden $T = 3$. Man vet att dess Fourierkoefficienter ges av $a(n) = 0$ för alla $n \geq 0$ och

$$b(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & n = 1, 2; \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Ange $f(t)$.

Övning 2.4. Den periodiska signalen $f(t)$ har fundamentalperiod $T = 0.02$ [sek.], och ges under intervallet $-0.005 < t < 0.015$ [sek.] av

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -0.005 < t < 0.005; \\ 1, & 0.005 \leq t < 0.015 \end{cases}$$

(a) Ange frekvensen Φ och vinkelfrekvens Ω.
(b) Ett idealt *bandpassfilter* är ett filter som bara släpper igenom frekvenser i ett begränsat interval. Signalen $f(t)$ får passera ett bandpassfilter som släpper igenom frekvenser Φ i intervallet $100 < \Phi < 400$ [Hz] . Beskriv den filtrerade signalen.

Övning 2.5. Visa att Fouriesserien (3) kan skrivas på s.k. fasvinkelform

$$\frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \sin(n\Omega t + \phi_n),$$

där $A(n) = \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$ och där ϕ_n ges av

$$\sin \phi_n = \frac{a(n)}{A(n)} \tag{4}$$

$$\cos \phi_n = \frac{b(n)}{A(n)}. \tag{5}$$

Här syns tydligt att delsvängningen med vinkelfrekvens $\omega_n = n\Omega$ är en sinussvängning med amplitud $A(n) = \sqrt{a(n)^2 + b(n)^2}$. Funktionen $A(n)$ kallas funktionens (signalens) *frekvensspektrum* (också kallat *amplitudspektrum* i viss litteratur). Detta är alltså en mer precis, kvantitativ version av påståndet att Fourierkoefficienterna visar ”hur mycket” som finns av frekvensen $n\Omega$ i signalen $f(t)$.

Övning 2.6. En signal $h(t)$ ges av

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nt + \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2} \sin nt.$$

(a) Ange dess periodicitet, frekvens och vinkelfrekvens.
(b) Bestäm dess frekvensspektrum och plotta detta.

Övning 2.7. Bestäm Fourierkoefficienter och Fourierserie till den periodiska funktion $g(t)$ som har grundvinkelfrekvens $\Omega = \pi/2$ och som ges av

$$g(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < 0 \\ t, & 0 < t < 2 \end{cases}$$

Skriv också g:s Fourierserie på fasvinkel-form, och plotta frekvensspektrumet. Indikera vilka vinkelfrekvenser de olika amplituderna $A(n)$ svarar mot.

Övning 2.8. Gör följande experiment: Tag ett strängintrument, t.ex. en gitarr, och lyssna på den ton som uppstår då du knäpper på en lös sträng. Tonen har en grundfrekvens som du uppfattar som tonens tonhöjd. Övertonerna finns där och formar tonens klang. Placera nu ett finger löst på strängens mittpunkt; på så sätt dämpar du grundsvängningen, och om du nu slår an strängen kommer du att höra den första övertonen, som framträder som ny tonhöjd, i den ursprungliga grundfrekvensen frånvaro.Upprepa experimentet med dämpning vid en tredjedel av strängens längd. (Du kan forstätta högre upp i övertonsserien genom att dämpa vid punkter som ligger på avstånd $1/n$ av strängens längd från strängens ena ändpunkt, men det blir svårare och svårare att få ett hörbart resultat ju högre upp i övertonserien man kommer.)

2.3. **Fourieserien på komplex form.** En mer kompakt framställning av en periodisk funktions Fourierserie får vi genom att skriva den på komplex form. Vi utnyttjar då att

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\\ \sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{aligned} \tag{6}$$

vilket följer direkt ur $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, definitionen av exponentialfunktionen med imaginärt argument.

Genom att utnyttja (6) skriver vi om de trigonometriska termerna i (3):

$$\begin{aligned}&a(n)\cos n\Omega t + b(n)\sin n\Omega t\\ &\qquad = a(n)\left(\frac{e^{in\Omega t}+e^{-in\Omega t}}{2}\right) + b(n)\left(\frac{e^{in\Omega t}-e^{-in\Omega t}}{2i}\right)\\ &\qquad = \left(\frac{a(n)-ib(n)}{2}\right)e^{in\Omega t} + \left(\frac{a(n)+ib(n)}{2}\right)e^{-in\Omega t}.\end{aligned}$$

Om vi nu sätter

$$\begin{aligned}c(n) &= \frac{a(n)-ib(n)}{2}, \quad n = 1,2,\dots,\\ c(-n) &= \frac{a(n)+ib(n)}{2}, \quad n = 1,2,\dots,\\ c(0) &= \frac{a(0)}{2}\end{aligned} \tag{7}$$

kan vi skriva om (3) till

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\cos n\Omega t + b(n)\sin n\Omega t\\ &= c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t} + c(-n)e^{-in\Omega t}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t}.\end{aligned}$$

Vi noterar vidare att för $n = 1, 2, \dots$ är

$$\begin{aligned}c(n) &= \frac{a(n)-ib(n)}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_J (\cos n\Omega t - i\sin n\Omega t)\, f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{-in\Omega t}\,dt,\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} c(-n) &= \frac{a(n)+ib(n)}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_J (\cos n\Omega t + i\sin n\Omega t)\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{in\Omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{-i(-n)\Omega t}\, dt. \end{aligned}$$

Eftersom också $c(0) = a(0)/2 = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_J f(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{-i0\Omega t}\, dt$ gäller att

$$c(m) = \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{-im\Omega t}\, dt, \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots.$$

Vi sammanfattar detta:

Fourieserier på komplex form Till en periodisk funktion f med period T kan vi ordna dess Fourieserie. I komplex form ges den av

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t} \tag{8}$$

där Fourierkoefficientern $c(n)$ ges av

$$c(n) = \frac{1}{T}\int_J f(t)e^{-in\Omega t}\, dt \tag{9}$$

och J är ett interval av längd T, och vinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi/T$. (Att vi i formel (8) skriver "$\sim$", och inte "=", beror på att en funktion f:s Fourierserier inte säkert konvergerar mot f.)

- De komplexa Fourierkoefficienterna $c(n)$ svarar entydigt mot reella Fourierkoefficenter $a(n)$, $n \geq 0$, och $b(n)$, $n > 0$, såsom de definieras i (1) och (2).
- Under lämpliga förutsättningar på f kommer dess Fourieserie att konvergera mot f (se t.ex. Theorem 11.1 i Zill-Cullen som formulerar ett tillräckligt villkor för konvergens av Fourierserier på reell form; eftersom den komplexa formen är en ren omformulering gäller samma tillräckliga villkor i detta fall).
- Informellt gäller följande: En T-periodisk funktion (signal) f med konvergent Fourierserie är alltså bestämd av att man antingen (i) ger alla funktionsvärden (momentana amplituder) $f(t)$ på ett interval $J = (d, d+T)$, eller, (ii) ger en oändlig lista med komplexa tal (dvs. en komplexvärd funktion på heltalen) $c(n)$ som specificerar frekvensinnehållet $n\Omega$. Se vidare övningarna 2.5 och 2.11. (För att vara riktigt sant måste detta preciseras, t.ex. kan vi ändra f:s värde i enstaka punkter utan att Fourier-serien ändras, men det ligger utanför ramarna för denna kurs.)

Kommentar. Vi kan införa beteckningen $\mathcal{F}_T$ för tillordningen (=funktionen) som avbildar en T-periodisk funktion f på Fourierkoefficients-funktionen $c(n)$,

$$\mathcal{F}_T\{f(t)\} = c(n)$$

och beteckningen $\mathcal{F}_T^{-1}$ för den inversa operationen som återvinner T-periodiska funktioner f från Fourierkoefficienterna,

$$\mathcal{F}_T^{-1}\{c(n)\} = f(t).$$

Korrespondensen mellan beskrivningar av T-periodiska signaler genom (i) sina momentana amplituder $f(t)$, eller, (ii) sitt frekvensinnehåll $c(n)$ kan skrivas

$$f(t) \underset{\mathcal{F}_T^{-1}}{\overset{\mathcal{F}_T}{\rightleftarrows}} c(n).$$

2.4. **Övningar.**

Övning 2.9. Bestäm de komplexa Fourierkoefficienterna och Fourierserierna till funktionerna i övningarna 11.2: 1, 7 och 15 i Zill-Cullen genom att använda (8) och (9). Kontrollera dina svar genom att använda sambanden (7) mellan den komplexa och den reella seriens koefficienter.

Övning 2.10. Visa att

(a) om f är en reell, jämn T-periodisk funktion så är dess komplexa Fourierkoefficienter $c(n)$ också en jämn reelvärd funktion av n.
(b) om f är en reell udda T-periodisk funktion så är dess komplexa Fourierkoefficienter en udda, rent imaginär funktion av n.
(c) Förenkla också (8) och (9) för jämna respektiv udda funktioner, och övertyga dig om att du på detta sätt återfår cosinus- och sinus-serierna i Zill-Cullen 11.3 för jämna respektive udda funktioner.

Övning 2.11. Visa att de komplexa Fourierkoefficenterna $c(n)$ för en reell funktion $f(t)$ uppfyller

(a) $c(n) = \overline{c(-n)}$, där $\overline{z}$ betecknar komplexkonjugatet av z;
(b) $|c(n)| = |-c(n)|$.
(c) Visa också att $A(n) = |c(n)| + |-c(n)| = 2\,|c(n)|$ för $n \geq 1$, där $A(n)$ är frekvensspektrat som det definieras i Övning 2.5. Vi ser alltså att beloppet av koefficienterna $c(n)$ också på ett precist sätt talar om "hur mycket" som finns av frekvensen $n\Omega$ i signalen $f(t)$.

Övning 2.12. Plotta frekvensspektrat för funktionerna från Zill-Cullen i Övning 2.9, med vinkelfrekvenser $n\Omega$ på den horisontella axeln, och amplituder $A(n)$ på den vertikala.

3. Fouriertransformen och Fourierintegraler

Fourierseriernas uttrycksmöjlighet begränsar sig till periodiska funktioner. För att kunna uttrycka en icke-periodiska funktioner på $(-\infty, \infty)$ på ett liknande sätt är det naturligt att (9) ersätts av en generaliserad integral över $(-\infty, \infty)$ (vi måste ju ta hänsyn till hela funktionen!); det visar sig också att summan (8), där vi summerar över alla frekvenser $\omega_n = n\Omega$ som är multiplar av grundfrekvensen, kommer att motsvaras av en generaliserad integral, där vi *integrerar* över *alla* frekvenser ω. Medan en periodisk funktion innehåller högst ett uppräkneligt antal frekvenser, kan en icke-periodisk funktion innehålla varje reell frekvens. Istället för en Fourierserie får vi, för lämpliga funktioner f, en s.k. *Fourierintegral*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{10}$$

En jämförelse med ekvationerna (8) och (9) visar en tydlig analogi. $\hat{f}(\omega)$, den s.k. *Fouriertransformen* av f kan liksom Fourierkoeffficeinterna $c(n)$ ses som ett uttryck för "hur mycket" av vinkelfrekvensen ω som "finns" i funktionen (signalen) f. Vissa författare använder beteckningen $C(\omega)$ för $\hat{f}(\omega)$ för att göra analogin med det periodiska fallet tydligare. Transformen själv är i allmänhet komplexvärd även när $f(t)$ är reell, men $\hat{f}(\omega)$:s absolutbelopp $A(\omega) = \left|\hat{f}(\omega)\right|$, funktionens *frekvensspekturm*, ger ett kvantitativt reellt mått på frekvenstätheten.

3.1. **Från Fourierserie till Fourierintegral — en heuristisk härledning.** Ett naturligt sätt att försöka utsträcka Fourier-teorin till icke-periodiska funktioner är att approximera en icke-periodisk funktion f med T-periodiska funktioner f_T, som överensstämmer med f på intervallet $J_T = (-T/2, T/2)$, för succesivt större värden T. Genom att sedan studera vad som händer med Fourieserien för f_T när $T \to \infty$ försöker vi finna en Fourierrepresentation för f.

Vi definierar f_T genom $f_T(t) = f(t)$ för $t \in J_T = (-T/2, T/2)$ och utvidgar sedan T-periodiskt (annorlunda uttryckt: f_T den T-periodisk utvidningen av f:s restriktion till $J_T = (-T/2, T/2)$). Observera att $f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)$. Var och en av funktionerna f_T kan uttryckas med en Fourierserie med koefficienter $c_T(n)$:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_T(n)e^{in\Omega t}, \quad c_T(n) = \frac{1}{T}\int_{J_T} f_T(t)e^{-in\Omega t}\,dt.$$

En första ledtråd till (10) få vi om vi observerar att $T \to \infty$ är ekivalent med att grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi/T \to 0+$. Summering av Fourierserien sker över alla frekvenser $\omega_n = n\Omega$, och avståndet $\omega_{n+1} - \omega_n = \Omega$ mellan två närliggande frekvenser minskar alltså i takt med att T ökar. Detta indikerar att summan skulle kunna tänkas övergå i en integral vid gränsövergången $T \to \infty$; vi har tidigare antytt varför det är rimligt att den integral som bestämmer $c_T(n)$ kommer att utsträckas till hela reella axeln.

För att kunna analysera vad som händer vid gränsövergången $T \to \infty$ lite närmare skriver vi om dessa ekvationer som

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{J_T} f_T(t) e^{-in\Omega t}\, dt \right\} e^{in\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{J_T} f_T(t) e^{-in\Omega t}\, dt \right\} e^{in\Omega t} \frac{2\pi}{T},$$

som med beteckningarna $\omega_n := n\Omega$ och $\Delta\omega_n := \omega_{n+1} - \omega_n = \Omega = 2\pi/T$ är

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{J_T} f_T(t) e^{-i\omega_n t}\, dt \right\} e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n.$$

När vi låter $T \to \infty$ går $f_T \to f$ och att $J_T \to (-\infty, \infty)$. Uttrycket inom klammerparentesen skulle för fixt ω_n konvergera mot

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_n t}\, dt$$

Gränsövergången kompliceras av att vi egentligen samtidigt skall låta $\omega_n \to 0+$. Vi bortser i detta skissartade resonemang ifrån detta, och låter $T \to \infty$ i klammerparentesen för fixt ω_n. Med beteckningen

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

får vi då att

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n.$$

Högerledet kan ses som en generaliserad Riemannsumma för funktionen $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$, med intervallängd $\Delta\omega_n = \Omega = 2\pi/T$ på intervallet $(-\infty, \infty)$. (Egentliga Riemannsummor är definierade på ändliga interval). När $T \to \infty$ kan vi därför förvänta oss att högerledet koknvergerar mot den generaliserade integralen $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$. Vi har heuristiskt motiverat (10).

3.2. **Definitioner.** Fouriertransformen av en funktion definieras genom en generaliserad integral. För att detta skall vara meningsfullt måste vi har ett villkor som garanterar att den generaliserade funktionen är konvergent. Ett tillräckligt villkor är att funktion f är *absolutintegrerbar*, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$. Eftersom $|e^{-i\omega t}| = 1$ är $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$. Så om f är absolutintegrerbar är

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) e^{-i\omega t} \right|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

vilket rättfärdigar följande definition.

Definition 2. Till en funktion f sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$ definierar vi dess Fouriertransform

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Vi använder också beteckningen $\mathcal{F}$ för den operation som transformer f till $\hat{f}$ och skriver

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$$

eller, om vi vill påminna oss om de obereoende variablerna,

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Definition 3. Fourierintegralen till en funktion $f(t)$ med Fouriertransform $\hat{f}(\omega)$ definieras som

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Vi formulerar nu ett tillräckligt villkor på funktionen f för att Fourierintegralen skall existera som en konvergent generaliserade Riemannintegral, och som också garanterar att Fourierintegralen är lika med f själv i alla kontinuitetspunkter. Observera den formella likheten med Theorem 11.1 i Zill-Cullen.

Sats 1. *Om f är absolutintegrerbar på $(-\infty, \infty)$, och om f och f' är styckvis kontinuerliga på varje ändligt delinterval gäller att*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Speciellt är $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$ om f är kontinuerlig i punkten t.

Vi tänker på Fourierintegralen som den inversa operationen till $\mathcal{F}$:

$$f = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} \quad \text{eller} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t).$$

Kommentar. Man kan också göra reda för Fourietransformen och Fourierintegralen för funktioner som inte är absolutintegrerbar. Det finns t.ex. en parallell teori för kvadratiskt integrerbara funktioner ($1/(|x|+1)$ är exempel på en funktion som inte är absolutintegrerbar, men väl kvadratiskt integrerbar, dvs $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(|x|+1)^2\,dx < +\infty$). Vi ska nedan också ge exempel på Fouriertransformer i s.k. distributionsmening (avsnitt 5.3–5.4), som ger möjlighet till att behandla såväl s.k. distibutioner som en mycket större klass av funktioner. Den bakomliggande teorin för allt detta ligger utanför ramarna för denna kurs,vi kommer därför forsättningsvis att nöja oss med mer oprecisa formuleringar, och inte fördjupa oss i frågor om konvergensegenskaper m.m.

Några exempel

Exempel 3.1. Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

kan tänkas representera en "enhets"-signal med begränsad varaktighet. Dess Fouriertransform ges av

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i\omega\pi}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega\pi}}{i\omega}$$
$$= \frac{1}{i\omega}\left\{(\cos\omega\pi + i\sin\omega\pi) - (\cos\omega\pi - i\sin\omega\pi)\right\} = \frac{2\sin\omega\pi}{\omega}, \quad \omega \neq 0,$$

och $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i0t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$. Sammanfattningsvis har vi alltså funnit att

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin\omega\pi}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2\pi, & \omega = 0. \end{cases}$$

$\hat{f}$ är en kontinuerlig funktion av ω, eftersom $\lim_{\omega\to 0} \frac{2\sin\omega\pi}{\omega} = 2\pi = \hat{f}(0)$. Detta är ingen tillfälighet: Om $f(t)$ är en absolutintegrerbar funktion så existerar Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ som en kontinuerlig funktion av ω. Vi kan därför utgå ifrån att $\hat{f}(0)$ är definierad av gränsvärdet i $\omega = 0$. Med den förenklingen kan vi genom att tillämpa Sats 1 skriva $f(t)$ som en Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\omega\pi}{\omega} e^{i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi} e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Exempel 3.2. Bestäm $\mathcal{F}\{f\}$ då

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

där $a > 0$ är en konstant. Ange också f:s Fourierintegral, och ange vilka värden den konvergerar mot. Bestäm även f:s frekvensspektrum.

Lösning: $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$ ges av

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$
$$= \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega} - \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-(a+i\omega)R}}{a+i\omega} = \frac{1}{a+i\omega}.$$

f:s Fourierintegral ges av

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}\right\}\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega}\,d\omega.$$

Eftersom f uppfyller villkoren i Sats 1, och f är kontinuerlig i alla punkter utom i $t = 0$ gäller att

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}\right\}\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega}\,d\omega = \begin{cases} f(t) = e^{-at}, & t \neq 0 \\ \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, & t = 0. \end{cases}$$

Frekvensspektrat $A(\omega) = \left|\hat{f}(\omega)\right|$ ges av

$$A(\omega) = \left|\frac{1}{a+i\omega}\right| = \frac{1}{|a+i\omega|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}.$$

En signal som bara har frekvenser inom ett begränsat interval kallas en *bandbegränsad* signal. Ett specialfall ges i nästa exempel.

Exempel 3.3. En signal $g(t)$ är sådana att alla frekevenser i ett visst interval förekommer med samma amplitud, dvs signalen har Fouriertransform av formen

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 1 & -c < \omega < c \\ 0 & |\omega| \geq c \end{cases}$$

för något $c > 0$. Signalen $g(t)$ ges då av

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{g}\right\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{-c}^{c} = \frac{\sin ct}{\pi t}$$

Funktionen $g(t)$ är inte absolutintgererbar, men det är lätt att övertyga sig om att vi kan låta f och $\hat{f}$ byta roller i Definition 3 och Sats 1: Om $\hat{f}$ är absolutintegrerbar existerar Fourierintegralen, och transformen av Fourierintegralen ger oss tillbaka $\hat{f}$.

Sammanfattning: Vi kan specificera en icke-periodisk funktion (signal) genom att antingen (i) ge dess funktionsvärde (momentanta amplitud) $f(t)$ för alla reella tal (tidpunkter) t, eller (ii) specifiera Fouriertransformens värde (specificera signalens frekvensinnehåll) för alla reella frekvenser ω. Givet den ena beskrivningen kan vi via $\mathcal{F}$ eller $\mathcal{F}^{-1}$ rekonstruera den andra:

$$f(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \hat{f}(\omega).$$

Den reell-värda funktion $A(\omega) = \left|\hat{f}(\omega)\right|$ kallas i analogi med det periodiska fallet för frekvensspektrat, och är ett mått på "hur mycket" av frekvensen ω som förekommer i funktionen (signalen) $f(t)$.

Kommentar. I litteraturen förekommer en rad varianter på definitionen av Fouriertransformen. Om transformen ändras, ändras förstås också återtransformeringen.

- Faktorn $\frac{1}{2\pi}$ i återtransformeringen kan bytas mot en faktor $\frac{1}{2\pi}$ i transformen, eller så har man en faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ i bägge riktningarna.
- Istället för vinkelfrekvensen ω som variabel väljer en del författare frekvensen $\phi = \omega/2\pi$; detta variabelbyte medför att faktorn $\frac{1}{2\pi}$ försvinner helt.

- I Zill-Cullen har minustecknet i exponenten flyttat från transform till inverstransform, detta är dock mindre vanligt.
- Också andra beteckningar förekommer. Transformen betecknas som nämnts ibland $C(\omega)$. Vanligt är också att funktioner betecknas med gemener ("små bokstäver") och transformer med motsvarande versaler ("stora bokstäver"), $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$, $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$ etc. Kärt barn har många namn!

3.3. **Övningar.**

Övning 3.1. Beräkna Fouriertransformen till följande funktioner. Uttryck också var och en av funktionerna som en Fourierintegral. Vilka värden konvergerar Fourierintegralen mot?

(a) $f(t) = e^{-a|t|}$, där $a > 0$ är en konstant.
(b) $f(t) = te^{-a|t|}$, där $a > 0$ är en konstant.
(c)
$$f(t) = \begin{cases} |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Övning 3.2. Bestäm $\mathcal{F}\{(f)\}(\omega)$ då

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t \leq 0 \\ 2, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Övning 3.3. Utnyttja Exempel 3.1 för att visa att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x}\, dx = \pi$

Övning 3.4. Generalisera Exempel 3.1. Beräkna för $\alpha > 0$ Fouriertransformen till funktion

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} c, & -\alpha < t < \alpha \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Ange också upp f_α:s Fourierintegral. Jämför också med Exempel 3.3. Skissera graferna $f_\alpha(t)$, $\hat{f}_\alpha(\omega)$ samt frekvenspektrat $A(\omega) = \left|\hat{f}_\alpha(\omega)\right|$. Hur påverkas dessa av förändringar i parameterarna α och c?

Övning 3.5. Visa att

(a) om f är en reell jämn funktion så är dess Fouriertransform också en reell funktion en reell och jämn funktion
(b) Visa att om f är en reell udda funktion så är $i\hat{f}$ också en reell och udda funktion

Utnyttja sedan detta för att härleda Fourier-cosinustransformen för jämna funktioner respektive Fourier-sinustransformen för udda funktioner såsom de definieras i Definition 14.3 i Zill-Cullen kapitel 14.3, sid. 598 i 5:e upplagan.

Övning 3.6. I Definition 14.2 i Zill-Cullen kapitel 14.2, sid. 596 i 5:e upplagan, defineras en reell variant av Fouriertransformen. På sidan 599 härledar man sedan i Zill-Cullen sin variant av den komplexa Fouriertransformen och Fourierintegralen, där minustecknet i exponenten har flyttat från transform till återtransform.

Låt dig inspireras av bokens resonemang på sidan 599, och visa att definitionerna i detta kompendium av den komplexa Fouriertransformen leder till den reella varianten i Definition 14.2 i Zill-Cullen!

Övning 3.7. Beräkna de reella Fouriertransformerna i följande övningar i Zill-Cullen: 14.3.3, 14.3.7 och 14.3.9

4. Fouriertransformens egenskaper

4.1. **Dualitet.** Definitionen av Fouriertransformen $\mathcal{F}$ och dess invers $\mathcal{F}^{-1}$ uppvisar ju ett stort mått av symmetri, som också framgår av t.ex. en jämförelse av Exempel 3.1 och Exempel 3.3.

Antag att $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$. Funktionen $\hat{f}$ kan vi förstås tänka på som en funktion i sig. Om den har en Fouriertransform, ges den i en punkt γ av

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(t)\right\}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-i\gamma t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{i(-\gamma)t}\,dt.$$

Men så när som på en faktor $1/2\pi$ är den sista integralen inget annat än värdet i $-\gamma$ av inverstransformen av $\hat{f}$, dvs f självt. Vi får alltså att

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}\right\}(\omega) = 2\pi f(-\omega). \tag{11}$$

Ett likartat resultat gäller för inverstransformen av en funktion $g = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}\}$. Vi sammanfattar detta som en sats

Sats 2. *Vi har följande* duala *förhållande mellan $\mathcal{F}$ och $\mathcal{F}^{-1}$:*
Om f har en Fouriertransform $\hat{f}$ som i sin tur låter sig Fouriertransformeras så är

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}\right\}(\omega) = 2\pi f(-\omega). \tag{12}$$

Om $g = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}\}$ kan inverstransformeras så är

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-t). \tag{13}$$

Exempel 4.1. Vi återvänder till Exempel 3.3, med $c = \pi$, och beräknar den inversa Fouriertransformen av

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} 1 & -\pi < \omega < \pi \\ 0 & |\omega| \geq \pi \end{cases}$$

med hjälp av dualitet och Exempel 3.1, där transformen av funktion $f(t) = \hat{g}(t)$ beräknades.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}\}(t) &= \{\text{ enligt def av } f\ \} = \mathcal{F}^{-1}\{f\}(t) = \{\text{dualitet}\} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\sin\pi t}{t} = \frac{\sin\pi t}{\pi t}.\end{aligned}$$

Exempel 4.2. Vi beräknar Fouriertransformen av $h(t) = (a+it)^{-1}$, $a > 0$. Med beteckningar och resultat från Exempel 3.2 får vi via dualitet att

$$\mathcal{F}\left\{(a+it)^{-1}\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\hat{f}(t)\right\}\omega = 2\pi f(-\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \geq 0; \\ 2\pi e^{a\omega}, & \omega < 0. \end{cases}$$

4.2. **Linjäritet. Skalings- och translationsegenskaper.**

Sats 3. *Fouriertransformen är linjär: Om f och g har Fouriertransformer $\hat{f}$ repektive $\hat{g}$ så gäller att*

$$\mathcal{F}\left\{af(t) + bg(t)\right\}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega).$$

Bevis. Detta följer direkt av integralens linjäritet. □

Även inverstransformen $\mathcal{F}^{-1}$ är linjär.

Nästa sats beskriver hur skalförändringar på tids- eller frekvensaxeln fortplantar sig till den andra.

Sats 4. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ och $a \neq 0$ är en reell konstant sådan att $\mathcal{F}\left\{f(at)\right\}$ existerar, så är*

$$\mathcal{F}\left\{f(at)\right\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Vi tolka detta på följande vis. Om $a > 1$ har $y = f(at)$ en graf som fås som en horisontell kompression av grafen $y = f(t)$ med faktor $1/a$, på transformsidan svarar detta mot en horisontell töjning med en faktor a, samt en vertikal kompression med en faktor $1/a$. För $0 < a < 1$ blir rollerna de omvända. Ju mer "koncentrerad" funktionen är, desto mer "utspridd" är transformen, och vice versa (jämför Övning 3.4). Negativa a innebär förutom en skalförändring också en spegling i origo av såväl funktions- som transformgrafen.

Korollarium. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ så är*

$$\mathcal{F}\left\{f(-t)\right\}(\omega) = \hat{f}(-\omega).$$

Bevis av Sats 4. Per definition gäller att

$$\mathcal{F}\left\{f(at)\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Vi gör variabelbytet $s = at$. Om $a > 0$ får vi då

$$\mathcal{F}\left\{f(at)\right\}(\omega) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{\frac{-i\omega s}{a}}\,ds = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Om $a < 0$ får vi omkastade gränser i integralen vid variabelbytet
($t \to \infty \iff s \to -\infty$ och $t \to -\infty \iff s \to +\infty$). Vi får

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{f(at)\right\}(\omega) &= \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(s)e^{\frac{-i\omega s}{a}}\,ds = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{\frac{-i\omega s}{a}}\,ds \\ &= -\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right),\end{aligned}$$

där den sista likheten följer av att $-a = |a|$ om $a < 0$. □

Exempel 4.3. I Exempel 3.1 beräknade vi Fouriertransformen av

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

och fann att $\hat{f}(\omega) = \frac{2\sin\omega\pi}{\omega}$. Vi utnyttjar nu Sats 3 (linjäritet) och Sats 4 (skalning) till att beräkna Foruiertransformen av

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2}; \\ 2, & \frac{1}{2} < |t| < 1; \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

För att se att g går att utrycka i termer av f noterar vi först att för $a > 0$

$$f(at) = \begin{cases} 1, & -\pi < at < \pi \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{-\pi}{a} < t < \frac{\pi}{a} \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi ser därför att $g(t) = 2f(\pi t) - f(2\pi t)$ (Kontrollera detta!), vilket ger att att

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{2f(\pi t) - f(2\pi t)\right\}(\omega) = \{\text{linjäritet}\} \\ &= 2\mathcal{F}\left\{f(\pi t)\right\}(\omega) - \mathcal{F}\left\{f(2\pi t)\right\}(\omega) = \{\text{skalning}\} \\ &= 2\frac{1}{\pi}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\hat{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\ &= 2\frac{1}{\pi}\frac{2\sin\frac{\omega}{\pi}\pi}{\frac{\omega}{\pi}} - \frac{1}{2\pi}\frac{2\sin\frac{\omega}{2\pi}\pi}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{4\sin\omega - 2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}. \end{aligned}$$

Jämför också med Övning 3.4

Härnäst följer två satser som beskriver hur frekvensinnehållet förändras vid en tidstranslation av den ursprungliga signalen respektive hur signalen förändras av en frekvens-translation.

Sats 5. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ och t_0 är en reell konstant så är*

$$\mathcal{F}\left\{f(t - t_0)\right\}(\omega) = e^{-it_0\omega}\hat{f}(\omega).$$

Sats 6. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ och ω_0 är en reell konstant så är*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(\omega - \omega_0)\right\}(t) = e^{i\omega_0 t}f(t).$$

Vi noterar att dessa två satser är nästan identiska i form, så när som på tecknet i exponenten i högerledet. Bevisen lämnas som övningar.

Från Sats 6 får vi följande följdsats

Korollarium. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ gäller att*

(a) $\mathcal{F}\left\{f(t)\cos\alpha t\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\Big(\hat{f}(\omega - \alpha) + \hat{f}(\omega + \alpha)\Big)$;

(b) $\mathcal{F}\left\{f(t)\sin\alpha t\right\}(\omega) = \frac{1}{2i}\Big(\hat{f}(\omega - \alpha) - \hat{f}(\omega + \alpha)\Big)$.

Bevis av Korollarium. Sats 6 kan vi omformulera som

$$\mathcal{F}\left\{e^{i\omega_0 t}f(t)\right\}(\omega) = \hat{f}(\omega-\omega_0). \tag{14}$$

Eftersom $\cos\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}\right)$ följer att

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\cos\alpha t\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{f(t)\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}\right)\right\}(\omega)$$

som p.ga. linjäritet och (14)

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\left\{f(t)e^{i\alpha t}\right\}(\omega)+\mathcal{F}\left\{f(t)e^{-i\alpha t}\right\}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega-\alpha)+\hat{f}(\omega+\alpha)\right).$$

Detta bevisar det första påståendet. Det andra följer med ett likartat bevis. □

Exempel 4.4 (Amplitudmodellering). Korellariet ovan har en direkt signalteoretisk tolkning. Som bekant är $A\cos\alpha t$ en periodisk svängning med konstant amplitud $= A$ och vinkelfrekvens $= \alpha$. Om vi nu istället för en fix amplitud har en tidsberoende amplitud $f(t)$ säger man att signalen $\cos\alpha t$ har *amplitudmodulerats* med $f(t)$. Den resulterande signalen $f(t)\cos\alpha t$ har då ett frekvensinnehåll som beskrivs av korellariet.

4.3. **Övningar.**

Övning 4.1. Visa dualitets-ekvation (13) med resonemang analogt med beviset för (12).

Övning 4.2. I en tidigare övning har du visat för att $a > 0$ är

$$\mathcal{F}\left\{te^{-a|t|}\right\}(\omega) = -\frac{4ia\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2}.$$

Utnyttja detta för att bestämma Fouriertransformen av $\frac{t}{(a^2+t^2)^2}$.

Övning 4.3. Bestäm funktionen $g(t)$ så att $\hat{g}(\omega) = e^{-|\omega|}$ genom att utnyttja att resultet från Övning 3.1 a).

Övning 4.4. Visa att om f är en absolutintegrerbar funktion så gäller att $\mathcal{F}^{-1}\{g\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{g\}(-\omega)$

Övning 4.5. Beräkna först Fouriertransformen av $e^{-|t|}$ från Fourietransformens definition. Beräkna sedan tranformen av $e^{-a|t|}$, $a > 0$, med hjälp av Sats 4, och jämför resultatet med Övning 3.1 a).

Övning 4.6. Sats 4 har också en dual formulering: Om inverstransformen av $\hat{f}(\omega)$ är $f(t)$, och $b \neq 0$ är en reell konstant så är

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{f}(b\omega)\right\}(t) = \frac{1}{|b|}f\left(\frac{t}{b}\right),$$

dvs. det duala påståendet är identiskt till formen. Visa detta.

Övning 4.7. Bevisa satserna 5 och 6. Antingen kan visa satserna separat, de följer enkelt av definitionerna, eller också kan du först visa den ena på detta sätt, och sedan visa att den andra följer av dualitet. En nyttig övning i att hålla rätt på begrepp och beteckningar!

Övning 4.8. Fouriertransformera

(a) $e^{-|t-c|}$,
(b) $e^{-|at-c|}$,
(c) $e^{-a|t-c|}$,

där c är en reell konstant och $a > 0$.

Övning 4.9. Bestäm den komplexvärda funktion $h(t)$ sådan att $\hat{h}(\omega) = \left(9 + (\omega - \pi)^2\right)^{-1}$, genom att utyttja resultet från Övning 3.1 a).

Övning 4.10. Visa att frekvensspektrat hos en signal inte påverkas av en tidstranslation av signalen.

4.4. **Derivering och transformering.** Det råder ett enkelt samband mellan en Fouriertransform av en funktion och Fouriertransformen av dess derivata.

Sats 7. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ och så har $f'(t)$ transformen*

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Likheten får tolkas med viss försiktighet. Om f är absolutintegrerbar, kontinuerlig och om derivatan är styckvis kontinuerlig på varje ändligt interval gäller likhet i varje punkt ω. Under andra förutsätningar får satsen ges en något annan tolkning. T.ex gäller den i s.k. distributionsmening för distributioner (generaliserade funktioner), som vi kommer att se exempel på längre fram.

Vi kan lätt motivera föregående sats genom följande formella manipulation.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Det sista ledet känner vi igen som en inverstranform $\mathcal{F}^{-1}\left\{i\omega\hat{f}(\omega)\right\}$, och genom att Fouriertransformera ytterleden följer att $\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

Korollarium. $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\}(\omega) = (i\omega)^n\hat{f}(\omega)$.

Dualt gäller att

Sats 8. *Om $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ och så har $t^n f(t)$ transfomen*

$$\mathcal{F}\left\{t^n f(t)\right\}(\omega) = i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega).$$

Exempel 4.5. I Övning 3.1 a) visades att $\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$, $a > 0$. Från Sats 8 följer då att

$$\mathcal{F}\left\{te^{-a|t|}\right\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\frac{2a}{a^2+\omega^2} = i(-1)\frac{2a\cdot 2\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2} = \frac{-4ia\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2},$$

ett resultat vi redan funnit med västligt mer möda i Övning 3.1 b).

Exempel 4.6. Vi härleder nu Fouriertransformen av $g(t) = |t|\,e^{-a|t|}$, $a > 0$.
Låt $f(t) = te^{-a|t|}$ och låt $h(t) = e^{-a|t|}$. Då är

$$f'(t) = e^{-a|t|} + t\frac{d}{dt}e^{-a|t|} = e^{-a|t|} + te^{-a|t|}(-a)\frac{d}{dt}|t| = e^{-a|t|} - a\,|t|\,e^{-a|t|} = h(t) - ag(t),$$

där vi har utnyttjat att $\frac{d}{dt}|t| = \operatorname{sgn} t$ och att $t\operatorname{sgn} t = |t|$. Genom att Foureirtransformera ytterleden i föregående ekvation och utnyttja Sats 7 och transformens linjäritet får vi

$$i\omega\hat{f}(\omega) = \hat{h}(\omega) - a\hat{g}(\omega).$$

Följaktligen är

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\left(\hat{h}(\omega) - i\omega\hat{f}(\omega)\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{2a}{a^2+\omega^2} - i\omega\frac{-4ia\omega}{(a^2+\omega^2)^2}\right) = 2\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

Vi använder nu satserna 7 och 8 till att visa

$$\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/2}\right\}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}, \tag{15}$$

dvs. $f(x) = e^{-x^2/2}$ är så när som på en konstant sin egen transform.

Först observerar vi att $f'(t) = -te^{-t^2/2}$, så f uppfyller

$$f'(t) + tf(t) = 0.$$

Vi Fouriertransformerar sedan bägge led, och utnyttjar linjäritet och satserna 7 och 8. Vi får $i\omega\hat{f}(\omega) + i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = 0$, som efter division med i ger

$$\omega\hat{f}(\omega) + \frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = 0.$$

Denna differentialekvation för $\hat{f}$ (som är samma ekvation som gäller för f själv) är linjär av första ordningen, och kan lösas på standardsätt genom att multiplicera med den integrerande faktorn $\mu = e^{\omega^2/2}$. Man får att

$$\hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2}.$$

Konstanten C bestämmer vi genom att sätta $\omega = 0$ i

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-i\omega t}\,dt = \hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2},$$

vilket ger att $C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$, som enligt ett standard resultat är $= \sqrt{2\pi}$.

Kommentar. Funktionen e^{-at^2}, $a > 0$, den s.k. Gauss-klockan, spelar en viktig roll i många delar av matematiken; till exempel kan nämnas att inom sannolikhetsläran är dessa frekvensfunktioner för de i tillämpningar så allmänt förekommnade *normalfördelningarna.*

4.5. **Övningar.**

Övning 4.11. Bestäm Fouriertransformen av $t^2e^{-a|t|}$, $a > 0$.

Övning 4.12. Bestäm inverstransformen av $i\omega e^{-\omega^2/2}$.

Övning 4.13. Använd ekvation (15) samt Sats 5 till att visa att för $a > 0$

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/(4a)}$$

Övning 4.14. Finn en partikulärlösning till differentialekvationen

$$y'' - y = e^{-|t|}$$

genom att Fouriertransformera bägge led och på så sätt få en ekvation för $\hat{y}$. Lös sedan ut $\hat{y}$, och bestäm y genom återtransformering.

5. Heavisidefunktioner och Dirac-pulser

5.1. Heavisidefunktionen. *Läs i Zill-Cullen om definitionen av Heavisidefunktionen, eller enhetssteg-funktionen som den också kallas (kapitel 7.3.2, sid. 328–329, fr.o.m. "Unit Step Function" t.o.m. "Exemple" 5 i 5:e upplagan)(kapitel 7.3 sid. 275–277, fr.o.m. "Unit Step Function" till sista stycket innan "Theorem 7.6" i 4:e upplagan).*

Som signaler betraktat representerar $\mathcal{U}(t-a)$ en konstant signal som slås på vid $t = a$ och aldrig slås av. $\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)$, där $a < b$, representerar en konstant signal som slås på vid $t = a$ och slås av vid $t = b$. Likaså representerar t.ex. $(\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)) \sin t$, $a < b$, en sinussvängning som slås på under tidsintervallet $a < t < b$.

Observera att i litteraturen förekommer flera andra beteckningar på Heavisidefunktionen. Zill-Cullen använde som du har sett $\mathcal{U}(t)$ ($\mathcal{U}$ som i "**U**nit step function"). Beteckningen $H(t)$ (**H**eaviside) är också vanlig, liksom $\Theta(t)$ (används t.ex. i tabellverket *Beta*).

5.2. Övningar.

Övning 5.1. Jobba med övningarna 7.3: 49–54 samt 7.3: 55–62 (ej Laplace transformering) i Zill-Cullen 5:e upplagan tills du känner dig säker att tolka och skriva funktioner som innehåller Heavisidefunktioner. Motsvarande övningar i 4:e upplagan är 7.3: 45–50 samt 7.3: 51–58 (ej Laplace transformering).

Övning 5.2. Att bestämma Fouriertransformen av Heavisidefunktionen är inte så lätt, vi återkommer till det längre fram. Däremot är det lätt för vissa differenser av funktioner av denna typ. Bestäm Fouriertransformen av

(a) $\mathcal{U}(t+a) - \mathcal{U}(t-a)$ (jämför med Exempel 3.1 och Övning 3.4).
(b) $\mathcal{U}(t-a) - 2\mathcal{U}(t-b) + \mathcal{U}(t-c)$, där $a < b < c$.

5.3. **Dirac-pulser.** *Läs i Zill-Cullen om Dirac-pulser (eller Diracs delta-funktion som den också kallas fast det inte är en funktion i vanlig mening), kapitel 7.5 sid. 351 fram till "Theorem 7.11", samt punkt (i) under "Remark" på sidan 353 i Zill-Cullen 5:e upplagan. Motsvarande avsnitt i 4:e upplagan är kapitel 7.6 sidan 306 fram till "Theorem 7.11" samt samt punkt (i) under "Remark" på sidan 308.*

Som signal betraktat representerar en Dirac-puls $\delta(t)$ en signal som består av en momentan puls vid $t = 0$ med positiv ändlig energi. Translationen $\delta(t-c)$ svarar mot en momentan puls vid $t = c$.

Vi kan, som i framställningen i Zill-Cullen, betrakta Diracpulsen $\delta(t)$ vid $t = 0$ som ett slags gränsvärde av allt kraftigare men samtidigt kortare pulser med ändlig positiv varaktighet. Vi kan uttrycka detta med Heavisidefunktioner

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0+} \frac{1}{2a}\left(\mathcal{U}(t+a) - \mathcal{U}(t-a)\right). \tag{16}$$

Som nämns i Zill-Cullen är Dirac-pulsen $\delta(t)$ ett exempel på en *distribution* (eller *generaliserad funktion*). Inom den gren av matematiken som kallas distributionsteori har man utvecklat en differentialkalkyl för dessa objekt, som inte är funktioner, och än mindre är deriverbara, i vanlig mening. T.ex. gäller i distributionsmening att Diracpulsen är derivatan av Heavisidefunktionen,

$$\mathcal{U}'(t) = \delta(t). \tag{17}$$

Låt oss anta att $\mathcal{U}$ är överallt deriverbar (även i $t = 0$) i någon generaliserad mening. Derivatan borde då vara $= 0$ överallt utom i $t = 0$ där den borde vara oändligt stor. Lite mer precist borde gälla att

$$\mathcal{U}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{U}(t+h) - \mathcal{U}(t)}{h},$$

vilket i sin tur borde vara lika med såväl höger- som vänsterderivatan. Följaktligen skulle derivatan vara lika med medelvärdet av höger och vänsterderivatan och vi skulle då få att

$$\begin{aligned}\mathcal{U}'(t) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0+} \frac{\mathcal{U}(t+h) - \mathcal{U}(t)}{h} + \lim_{h\to 0+} \frac{\mathcal{U}(t-h) - \mathcal{U}(t)}{-h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h}\left(\mathcal{U}(t+h) - \mathcal{U}(t-h)\right) = \delta(t),\end{aligned}$$

vilket kan motivera (17).

I det följande kommer en viktig roll att spelas av Dirac-pulsens sållningsegenskap (filtreringsegenskap)

$$\int_J f(t)\delta(t-c)\,dt = f(c), \tag{18}$$

som gäller för kontinuerliga funktioner f och öppna intervall J som innehåller c. Detta är i själva verket den definition man ger Dirac-pulsen inom distributionsteorin. Intuitivt säger den att när vi bildar ett viktat integralmedelvärde av f, med vikt 0 i alla punkter utom i $t = c$ där vikten är oändligt stor, så får vi just $f(c)$.

5.4. **Fouriertransformering av Diracpulser, konstantfunktioner och Heavisidefunktioner.** Sållningsegenskapen (18) ger oss möjlighet att enkelt beräkna Fouriertransformen av Dirac-pulsen $\delta(t)$

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t}\, dt = e^{-i\omega 0} = 1 \tag{19}$$

En Dirac-puls vid $t = 0$ innehåller alltså *alla* frekvenser, och det med samma amplitud. Inverstransformeringen tar sig formen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t}\, d\omega = \delta(t),$$

en ekvation som inte kan tolkas som en likhet mellan vanliga funktioner, eftersom vänsterledet i sådana fall är en divergent integral (och högerledet inte är en vanlig funktion), men likväl kan detta ges en meningsfull tolkning inom distributionsteorin. Är man djärv kan man försöka sig på en intuitiv tolkning: vänsterledet är en generaliserad summering över harmoniska svängningar med alla tänkbara frekvenser, dessa kommer att släck ut varandra vid alla tidpunkter utom vid $t = 0$ då de ger upphov till en momentan puls.

Genom att kombinera (19) med Sats 5 härleder vi transformen av translaterade Diracpulser.

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t - t_0)\right\}(\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\}(\omega) = e^{-i\omega t_0} = \cos t_0\omega - i \sin t_0\omega. \tag{20}$$

Vi kan nu också, genom att tillämpa (19) och dualitetssambandet i (12) härleda transformen av konstant-funktionen $g(t) \equiv 1$

$$\mathcal{F}\left\{g(t)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\hat{\delta}(t)\right\}(\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \tag{21}$$

vilket tycks säga att en i tiden obegränsad konstant signal inte innehåller några andra frekvenser än $\omega = 0$, vilket ju är intuitivt rimligt.

Vi avslutar detta avsnitt med att utan härledning ge formeln för Heavisidefunktionens Fouriertransform:

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{U}(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{22}$$

5.5. **Övningar.**

Övning 5.3. Visa formeln för konstantfunktionens transform (21) med hjälp av Heavisidefunktionens Fouriertransform (22). Detta är naturligtvis inget bevis för (22), men visar åtminstonde att de två ekvationerna inte är i konflikt med varandra.

Övning 5.4. Visa att (18) formellt fås ur (16).

Övning 5.5. Låt $f(t) = \mathcal{U}(t+a) - \mathcal{U}(t-a)$. Bestäm Fouriertransformen av $f'(t)$

(a) genom att utnyttja (17) och (20);

(b) genom att utnyttja Övning 5.2 och Sats 7.

6. Fouriertransformen av periodiska funktioner — samband med Fourierserier

Vi härleder nu Fouriertransformen av en cosinusfunktion. Låt

$$\Delta(t) = \frac{1}{2}\left(\delta(t-a) + \delta(t+a)\right).$$

Ur ekvation (20) får vi då att

$$\hat{\Delta}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{\delta}(t-a) + \hat{\delta}(t+a)\right) = \cos a\omega$$

där sista likheten följer ur (20) eftersom $\cos x$ är en jämn funktion och $\sin x$ är udda. Dualitet ger sedan att

$$\mathcal{F}\left\{\cos(at)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\hat{\Delta}(t)\right\}(\omega) = 2\pi\Delta(-\omega) = 2\pi\frac{1}{2}\left(\delta(-\omega-a) + \delta(-\omega+a)\right).$$

Om vi sedan utnyttjar att Diracs delta puls är jämn, $\delta(-t) = \delta(t)$, följer det att

$$\mathcal{F}\left\{\cos(at)\right\}(\omega) = \pi\left(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a)\right) \tag{23}$$

På motsvarande sätt kan man visa att

$$\mathcal{F}\left\{\sin(at)\right\}(\omega) = i\pi\left(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)\right) \tag{24}$$

Dessa resultat är knappast förvånande. De säger att trigonometriska funktioner med (vinkel)frekens $\Omega = a$ har ett (vinkel)frekensspektrum som är koncentrerat i $\omega = a$.

Låt oss slutligen betrakta en periodisk funktion $f(t)$ med period T och vinkelfrekvens $\Omega = 2\pi/T$ som har Fourierserieutvecklningen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t}, \quad c(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\Omega t}.$$

Observera att vi kan skriva

$$e^{in\Omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Vi sätter in detta i den föregående ekvationen och tillåter oss sedan att byta ordning på integration och summation och får då

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c(n)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega-n\Omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega-n\Omega)\right)e^{i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega-n\Omega)\right)e^{i\omega t}\,d\omega.
\end{aligned}$$

Alltså får vi $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$ med $v(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega - n\Omega)$; vi har uttryckt $f(t)$ som en Fourierintegral med Fouriertransform

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = v(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)\delta(\omega - n\Omega).$$

Som sig bör är Fouriertransformen koncentrerad till vinkelfrekvenser $\omega_n = n\Omega$ som är heltalsmultiplar av f:s grundvinkelfrekvens Ω. Ekvationen kan ses som en kontinuerlig form av tillordningen av Fourierkoefficienter till en T-periodisk funktion f

$$\mathcal{F}_T\{f\} = \{c(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Fourierintegraler och Fouriertransformer kan på så sätt betraktas som en generalisering av Fourierserier och Fourierkoefficienter.

6.1. **Övningar.**

Övning 6.1. Använd Exempel 4.4 och korollariet till Sats 6 för visa att den signal som fås när en ren cosinussvängning f frekvensmoduleras med en annan cosinussvängning g (med en annan frekvens), är en summa av två nya cosinussvängningar, vars vinkelfrekvenser är summan respektive differensen av f:s och g:s vinkelfrekvenser.

Det finns också ett mycket enklare sätt att visa detta! Vilket då?

Kommentar. Denna typ av modulering, när en harmonisk svängning amplitudmoduleras med en annan harmonisk svängning kallas ibland för *ringmodulering*. Ringmodulering används inom elektroakustisk musik ("elektronmusik"), och finns också implementerat som effektbox (signalprocessor) att användas till t.ex. elgitarr. Gitarrens ton amplitudmoduleras med en ton som genereras i boxen, den modulerande tonens frekvens kan ofta regleras med en fotpedal. Eftersom den resulterande signalen har två distinkta frekvenser som harmonsikt sätt står i ett komplicerat förhållande till varandra, blir den modulerade signalen en "smutsig", dissonant ton, där ljudet också står i en svårförutsägbar relation till vad man spelar. Alltså en ganska extrem ljudeffekt.

Institutionen för Matematik, KTH, 100 44 Stockholm
E-mail address: thunberg@math.kth.se