KTH Matematik
Hans Thunberg

# 5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
## Tentamen 23/8 2005 08.00-13.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.
Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

Inga hjälpmedel tillåtna. *Lycka till!*

**A-uppgifter**

1. Lös initialvärdesproblemet $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + (x-1)e^{-y} = 0 \\ y(1) = \ln \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   Ange även lösningens existensintervall.

2. Bestäm alla lösningar $y(x)$ till ekvationen $y'' - 4xy' + \left(4x^2 - 1\right)y = e^{x^2}$.

   Tips: Gör ansatsen $y(x) = u(x)e^{x^2}$.

3. Bestäm och klassificera alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4y + 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + 1 \end{cases}$.

4. Låt $f(t)$ vara signalen $f(t) = q(t+1) - q(t-1) + d(t-2)$, $-\infty < t < \infty$, där $q(t)$ är Heavieside-funktion ("the unit step function") och $d(t)$ är en Dirac-puls.

   a) Beskriv signalen med lämplig figur eller i ord. (1p)

   b) Beräkna Fouriertransformen av $f$. (2p)

5. Låt $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ uppfylla systemet $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}$ och initialvillkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Skär lösningskurvan linjen $y = 0$ för något $t > 0$?

6. För vilka värden på konstanten $l$ finns det icke-triviala lösningar till randvärdesproblemet $y'' + ly = 0$, $y(0) = y(1) = 0$? Lös problemet i dessa fall.

**B-uppgifter**

7. Lös initialvärdesproblemet $y''y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

8. $P(t) \geq 0$ betecknar storleken på en viss djurpopulation vid tiden $t$. Man har observerat följande egenskaper hos populationen:
(i) Små populationer överlever inte, närmare bestämt finns det en konstant $T > 0$ sådana att om $0 < P(t) < T$ så minskar populationen i storlek.
(ii) Det finns också en övre gräns: det finns en konstant $K$, $K > T$ sådan att om $P(t) > K$ så minskar populationen också i storlek.
(iii) Så länge $T < P(t) < K$ växer populationen i storlek.

   Populationsstorleken och dess förändring antas variera kontinuerligt över tiden.

   Föreslå en differentialekvation för $P(t)$, och verifiera på lämpligt sätt att den föreslagna modellen har egenskaperna (i) – (iii). Skissera också modellens fasporträtt.

9. Betrakta systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
a) Bestäm systemets stationära lösningar. (1p)
b) Ange systemets allmänna lösning. (2p)
c) Avgör om de stationära lösningar du funnit är stabila eller ej. (1p)
(Stationära lösningar och stabilitet definieras analogt med plana system)

10. $u(x,t)$ beskriver temperaturen i Celsius-grader i en tunn tråd, $p$ längdenheter lång, i punkten $x$ vid tiden $t > 0$. Man vet att $u$ uppfyller $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < x < p$, $t > 0$. Trådens ändpunkter $x = 0$ och $x = p$ ligger i smältande is. Vid $t = 0$ ges temperaturen i $x$ av $f(x) = \sin x$. Bestäm temperaturen i trådens mittpunkt vid tiden $t = 2$.

11. Finn en icke-trivial periodisk lösning till systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$.

    Tips: Byt till polära koordinater.

12. Man vet att funktionen $f(x)$ kan uttryckas i en sinusserie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ på intervallet $(0, p)$. Härled det uttryck som, givet *f*, bestämmer koefficienterna $b_n$.