KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 30/5 2005 08.00-13.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.
Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

Inga hjälpmedel tillåtna. *Lycka till!*

A-uppgifter

1. Bestäm alla stationära lösningar till $\frac{dy}{dt} = y \sin y$ i området $-\frac{3p}{2} < y < \frac{3p}{2}$.
   Klassificera också dessa lösningar med avseende på stabilitet.

2. Bestäm alla lösningar $y(x)$ till $x^2 y'' + xy' - y = 1$ på intervallet $x > 0$.
   Tips: $y = x$ är en lösning till ekvationen $x^2 y'' + xy' - y = 0$.

3. Bestäm konstanten c så att $x = 1$ ligger på en periodisk bana av längd 2 till det tidsdiskreta dynamiska system som fås genom iteration av $f(x) = x^2 + c$. Avgör också om denna periodiska bana är attraherande eller repellerande.

4. $f(t)$ är en signal som bestäms av att $f(t) = t - \frac{1}{2}$, $0 \le t < 1$, och $f(t+1) = f(t)$ för alla t . Uttryck på lämpligt sätt f som en Fourierserie eller en Fourierintegral.

5. Bestäm och klassificera alla stationära lösningar till systemet
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy \\ \frac{dy}{dt} = y + 2xy \end{cases} .$$

6. Finn en icke-konstant funktion $u(x, y)$ av formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$ sådan att
$$2\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 .$$

B-uppgifter

7. a) Bestäm samtliga lösningar till $\frac{2}{3}\frac{du}{dx}+u=1.$ (2p)

   b) Lös initialvärdesproblemet $\frac{dy}{dx}+y=y^{-1/2}$, $y(0)=4$. (2p)

   Tips: Använd substitutionen $u=y^{3/2}$.

8. En partikel rör sig längs x-axeln under inverkan av en fjäder, av friktion och en drivande kraft på ett sådant sätt att läget som funktion av tiden $x(t)$ bestäms av

   $$x''+\frac{1}{10}x'+\frac{1}{2}x^3=1.$$

   a) Bestäm accelerationen vid tiden $t=0$ om $x(0)=2$ och $x'(0)=-1$. (2p)

   b) Hur skall partikeln placeras ut vid $t=0$ om den skall förbli i vila för $t>0$? (2p)

9. Bestäm samtliga lösningar till systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}2\\ e^{-3t}\end{pmatrix}.$

10. Utsvängningen $u(x,t)$ av en svängande sträng av längd p bestäms av ekvationerna

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0<x<p,\ t>0. \qquad (1)\\ u(0,t)=u(p,t)=0, & t>0. \qquad (2)\\ u(x,0)=0, & 0<x<p. \qquad (3)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=q(x-p/4)-q(x-p/2), & 0<x<p. \qquad (4)\end{cases}$$

där $q(x)$ är Heaviside-funktionen (*the Unit Step Function*).

Man kan visa att ekvationerna (1) och (2) är uppfyllda för var och en av funktionerna $u_n(x,t)=(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\sin nx$, $n=1,2,3,\ldots$, där a_n och b_n är godtyckliga konstanter. Bestäm en lösning $u(x,t)$ som uppfyller (1)-(4).

11. Betrakta systemet $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y^2\\ \dfrac{dy}{dt}=x^3\end{cases}$. Avgör stabiliteten hos den kritiska punkten $(0,0)$.

12. Låt $f(t)=e^{-t^2/2}$. Visa att f har Fouriertransformen $\hat{f}(w)=Ce^{-w^2/2}$, där C är en konstant. Tips: Utnyttja att $f'(t)+tf(t)=0$.

(Konstanten $C=\sqrt{2p}$, men det behöver du inte bevisa).