KTH
Matematik
Per Enqvist

Grupparbete 3 i kursen Amelia 1, VOG, vt 2005

Lämnas in den 7/4.
Ger maximalt 1 poäng för rapport och 1 poäng för presentation och opponering.

Gruppen lämnar in en gemensam lösning. Skriv alla gruppmedlemmars namn och personnummer på första sidan. När ni lämnar in er lösning garanterar ni samtidigt att ni arbetat med den på ett sätt som stämmer överens med hederskodexen. Samarbete och frågvishet uppmuntras, men att plagiera och att åka snålskjuts är förbjudet. Varje gruppmedlem ska kunna redogöra för hela gruppens arbete!

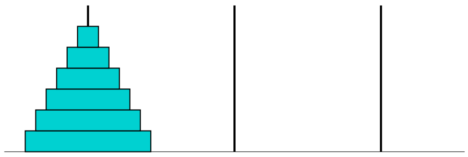
På lektionen den 23/2 delas ni in i grupper och tilldelas ett av nedanstående problem att arbeta med. Ni får då också veta vilken grupp som är er kontrollgrupp som ska kritisera erat arbete – och ni ska förstås också kritisera den andra gruppens arbete – med avseende på korrekthet, fullständighet, läsbarhet och presentation.

Inlämning sker på lektionen den 7/4. Observera att ni då ska lämna ert arbete i 2 exemplar, ett till övningsläraren och ett till kontrollgruppen. På lektionen den 12/4 träffar ni läraren och kontrollgruppen i ett samtal då ni muntligt får försvara och förklara ert arbete. Då ska ni också ge genomtänkt kritik på kontrollgruppens grupparbete.

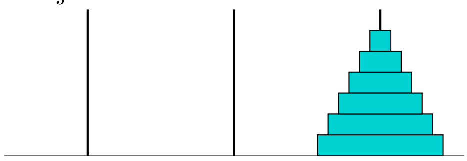
Det gruppen ska lämna in är följande: **A.** Presentation och lösning av det tillämpade problemet (ett av nedanstående problem). Tänk på att det ska gå att följa er lösning även om man är lite trögtänkt och inte har sett problemet förut. **B.** En kortfattad redogörelse om induktionsbevis där ni med egna ord förklarar varför ett induktionsargument kan ge ett bevis för ett uppräkneligt antal ekvationer. Beskriv två exempel, av lite olika art, och förklara varför dessa är lämpade att lösas med hjälp av just induktion. **C.** En kortfattad dagbok där ni skriver upp hur ni har arbetat med uppgiften. Tidpunkter då ni har träffats, vilka som varit närvarande, hur ni har lagt upp jobbet.

1. Tornen i Hanoi

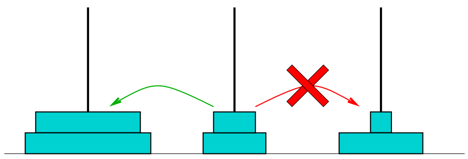
Det finns ett spel som kallas för tornen i Hanoi, och som sägs vara baserat på en legend om ett brödraskap som skulle flytta 64 stentavlor från en position till en annan. Det som gör det komplicerat är att de bara kan flytta en tavla åt gången, det är så trångt att man bara kan lägga ner brickorna i tre staplar: startstapeln, mellanstapeln och slutstapeln. Slutligen så har alla tavlor olika storlek och en större tavla kan inte placeras på en mindre (för att undvika att de förstörs). Startpositionen kan beskrivas schematiskt av följande bild.



och slutpositionen av följande

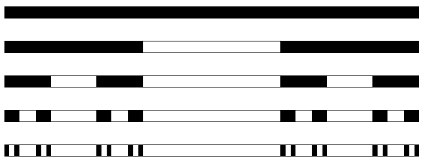


Under spelets gång kommer vi se att vissa förflyttningar är tillåtna och andra inte.



Det finns ett minsta antal förflyttningar som man måste göra för att flytta n stycken tavlor från en plats till en annan. Börja med att bestämma $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ och $P(4)$. Kan ni gissa hur $P(n)$ kommer att se ut ?
Visa nu att $P(n) = 2P(n-1) + 1$.
Om ni har en gissning på hur $P(n)$ ser ut så använder ni induktion för att visa att det är sant. Annars kan ni använda $P(n) = 2P(n-1) + 1$. för att bestämma $P(5)$, $P(6)$ osv tills ni kommer på något eller ger upp och ber någon av lärarna om hjälp.
I legenden arbetade ju brödraskapet med 64 tavlor, och det sägs att när de är klara kommer världen att gå under. Om vi antar att de gör varje förflyttning på en minut, hur lång tid tar det då tills de är klara ?

2. I denna uppgift ska vi betrakta ett intervall där vi succesivt bildar delintervall som färgas antingen svarta eller vita. Vi börjar med ett intervall $0 \leq x \leq 1$ som vi färgar helt svart. Detta intervall delar vi in i tre lika delar, där vi nu färgar det mittersta intervallet vitt. Se rad 2 i figuren nedan.
För nästa intervall upprepar vi nu proceduren ovan för båda av de två svarta intervallen, dvs vi delar in varje svart delintervall i tre delar och färgar det mittersta vitt.
Vi kan nu upprepa samma procedur om och om igen för att göra en finare och finare indelning i mindre och mindre intervall, se följande figur.



Låt nu $P(n)$ vara antalet svarta och vita intervall i rad n.
Visa att $P(n+1) = a\,P(n) + b$ för några konstanter a och b, och bestäm dessa konstanter.
Försök att gissa er till ett allmänt uttryck för $P(n)$, lämpligen genom att bestämma $P(1)$,$P(2)$, $P(3)$, ... för att hitta ett mönster.
Visa slutligen att den gissningen ni har fått fram verkligen gäller genom att använda ett induktionsbevis.