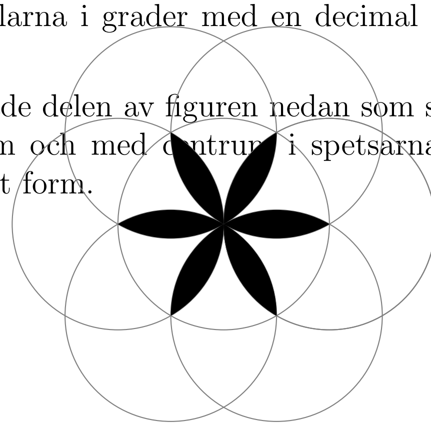
KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 16 januari 2007

1. a) Bestäm samtliga vinklar och arean av en triangel med sidorna $21,0$ cm, $23,0$ cm och $42,0$ cm. Ange vinklarna i grader med en decimal och arean med tre värdesiffrors noggrannhet. **(5)**

   b) Bestäm arean av den skuggade delen av figuren nedan som skärs ut av sex lika stora cirklar med radie 1 cm och med centrum i spetsarna av den skuggade figuren. Ange svaret på exakt form. **(4)**



Lösning: a) Vi börjar med att använda cosinussatsen för att bestämma vinklarna i triangeln. Vi betecknar sidlängderna med $a = 21$ cm, $b = 23$ cm och $c = 42$ cm. Motstående vinklar kallar vi för α, β och γ. Vi har då att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

och vi kan lösa ut $\cos\alpha$ som

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{23^2 + 42^2 - 21^2}{2 \cdot 23 \cdot 42} = \frac{1852}{1932} \approx 0,959$$

Vi får därmed att $\alpha \approx 16,5^\circ$. På samma sätt får vi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{21^2 + 42^2 - 23^2}{2 \cdot 21 \cdot 42} = \frac{1676}{1764} \approx 0,950$$

dvs $\beta \approx 18,2^\circ$ och

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{21^2 + 23^2 - 42^2}{2 \cdot 21 \cdot 23} = -\frac{794}{966} \approx -0,822$$

dvs $\gamma \approx 145,3°$. Vi kan också kontrollera att vinkelsumman i triangeln är $16,5° + 18,2° + 145,3° = 180°$.

För att nu bestämma triangelns area använder vi areasatsen som säger att

$$T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \approx \frac{21 \cdot 23 \cdot 0,570}{2} \text{ cm}^2 \approx 138 \text{ cm}^2.$$

b) Vi kan dela in figuren i sex bladformade delar som var och en består av två likadana cirkelsegment. För att beräkna cirkelsegmentens area behöver vi veta radien och öppningsvinkeln. Radien är 1 cm eftersom alla cirklarnas radier är 1 cm. Öppningsvinkeln är $\pi/3$ eftersom figurens centrum tillsammans med två närstående spetser bildar en liksidig triangel med sidan 1 cm. En cirkelsektor med öppningsvinkel $\pi/3$ och radie 1 cm har area $\pi/6$ cm^2 och får sedan dra bort den liksidiga triangelns area, dvs $1/2\sin\pi/3$ cm$^2 = \sqrt{3}/4$ cm^2. Därmed blir cirkelsegmentets area

$$\frac{\pi}{6} \text{ cm}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2.$$

Hela den skuggade figuren består av tolv likadana cirkelsegment varför arean av hela den skuggade figuren är

$$2\pi - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Svar:

a) Vinklarna är $16,5°$, $18,2°$ och $137,5°$. Arean är 138 cm^2.

b) Arean av den skuggade delen av figuren är $2\pi - 3\sqrt{3}$ cm^2.

2. a) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\cos(3x + \pi/7) = 1/4.$$

Ange svaret i radianer med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm konstanterna A och ϕ så att $2\cos 2x + \sin 2x = A\cos(2x + \phi)$. Ange svaren som närmevärden med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

c) Bestäm det exakta antalet lösningar till ekvationen $\tan 5x = \sin 10x$ i intervallet $0 \leq x \leq 100$. **(3)**

Lösning: a) Vi har att $\cos t = 1/4$ då $t = \pm t_0 + 2\pi n \approx \pm 1,318 + 2\pi n$, för heltal n. I vårt fall har vi att

$$3x + \frac{\pi}{7} = \pm t_0 + 2\pi n$$

och vi kan lösa ut x som

$$x = -\frac{\pi}{21} \pm \frac{t_0}{3} + \frac{2\pi n}{3}$$

Eftersom perioden är $2\pi/3 \approx 2,1$ och $n = 0$ ger lösningarna

$$x \approx 0,290$$

och

$$x \approx -1,468$$

måste $x \approx 0,29$ vara den minsta positiva lösningen.

b) Med hjälp av additionssatsen för cosinus kan vi skriva om högerledet som

$$A \cos 2x \cos \phi - A \sin 2x \sin \phi$$

och vi kan bestämma konstanterna A och ϕ genom att låta

$$\begin{cases} A \cos \phi & = 2 \\ A \sin \phi & = -1 \end{cases}$$

Genom att kvadrera och addera dessa ekvationer får vi

$$A^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

och vi kan välja $A = \sqrt{5} \approx 2,2$. För att bestämma ϕ kan vi nu sätta in $A = \sqrt{5}$ i ekvationerna ovan och får då

$$\begin{cases} \cos \phi & = 2/\sqrt{5} \\ \sin \phi & = -1/\sqrt{5} \end{cases}$$

Om vi delar ekvationerna med varandra och får $\tan \phi = -1/2$ och därmed kan vi välja $\phi \approx -0,464 + n\pi$. Eftersom $\sin \phi$ är negativt och $\cos \phi$ positivt väljer vi $n = 0$, och $\phi \approx -0,46$.

c) Vi börjar med att skriva om $\tan 5x$ som $\sin 5x / \cos 5x$ och $\sin 10x = 2 \sin 5x \cos 5x$. Vi får därmed lösningar då $\sin 5x = 0$, dvs då

$$x = \frac{n\pi}{5},$$

och kan sedan dela ekvationen med $\sin 5x$ och får

$$\frac{1}{\cos 5x} = 2 \cos 5x$$

Vi multiplicerar ekvationen med $\cos 5x$ eftersom $\cos 5x$ inte kan vara noll i någon lösning till den ekvation vi får. Ekvationen blir nu

$$\cos^2 5x = \frac{1}{2}$$

som har lösningarna

$$5x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},$$

dvs
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10}.$$
Sammantaget blir lösningarna
$$x = \frac{n\pi}{5} \qquad \text{och} \qquad x = \frac{\pi}{20} + \frac{n\pi}{10}.$$
De första lösningarna ligger de i intervallet $0 \leq x \leq 100$ om $0 \leq n\pi/5 \leq 100$, dvs om $0 \leq n \leq 500/\pi \approx 159,1$, vilket ger 160 heltalsvärden för n. De andra lösningarna ligger i intervallet $0 \leq x \leq 100$ om $0 \leq \pi/20 + n\pi/10 \leq 100$, dvs om
$$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1000}{\pi} \approx 318,3$$
vilket ger 319 heltalsvärden för n. Totalt finner vi $160 + 319 = 479$ lösningar till ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 100$.

Svar:

a) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 0,29$.

b) $A = \sqrt{5} \approx 2,2$ och $\phi \approx -0,46$.

c) Det finns 479 lösningar till ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 100$.

3. a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$g(t) = 4\sin^3 t + 3\cos t$$

på intervallet $0 \leq t \leq \pi$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde för den lösning till ekvationen $x^4 + 2x = 1$ som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta också felet i svaret. **(2)**

Lösning: a) Vi behöver använda både produktregeln och kedjeregeln för att derivera funktionen. Vi börjar att använda kedjeregeln på $g(x) = e^{\sin x}$, där derivatan av den inre funktionen $\sin x$ är $\cos x$. Eftersom derivatan av e^x är e^x får vi enligt kedjeregeln att

$$g'(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Vi behöver nu använda produktregeln för att beräkna derivatan av $f(x) = g(x)h(x)$ där $h(x) = \cos x$ och vi får

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^{\sin x} \cos x \cos x + e^{\sin x}(-\sin x) \\ &= (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}. \end{aligned}$$

b) För att bestämma maximum och minimum på intervallet behöver vi först finna nollställena till derivatan för funktionen. Eftesom $g(t) = 4\sin^3 t + 3\cos t$ får vi enligt kedjeregeln att

$$g'(t) = 12\sin^2 t \cos t - 3\sin t$$

och vi behöver lösa ekvationen

$$12\sin^2 t \cos t - 3\sin t = 0.$$

Om vi faktoriserar ekvationen får vi

$$3\sin t(4\sin t \cos t - 1) = 0$$

och därmed ges lösningarna dels av $t = n\pi$, för heltal n, dels av lösningarna till

$$4\sin t \cos t = 1$$

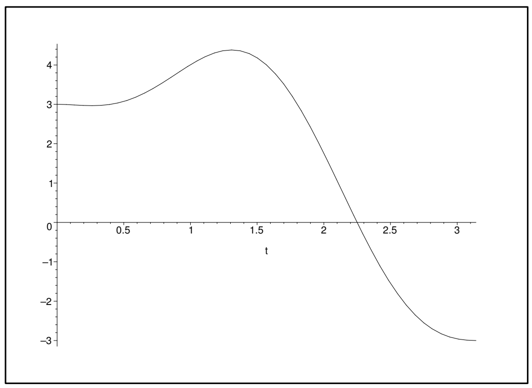
som kan skrivas om som

$$2\sin 2t = 1.$$

Lösningarna till den senare ges av $2t = \pi/6 + 2\pi n$ och $2t = 6\pi/6 + 2\pi n$, för heltal n. I vårt intervall $0 \le t \le \pi$ har vi nu lösningarna $t = 0$, $t = \pi/12$, $t = 5\pi/12$ och $t = \pi$. Vi jämför funktionens värden i dessa punkter, varav två är intervallets ändpunkter, och får

$$\begin{aligned} g(0) &= 4\sin^3(0) + 3\cos(0) = 3 \\ g(\pi/12) &= 4\sin^3(\pi/12) + 3\cos(\pi/12) \approx 2,97 \\ g(5\pi/12) &= 4\sin^3(5\pi/12) + 3\cos(5\pi/12) \approx 4,38 \\ g(\pi) &= 4\sin^3(\pi) + 3\cos(\pi) = -3 \end{aligned}$$

När vi jämför dessa värden ser vi att funktionens maximum ges av $g(5\pi/12) \approx 4,38$ och dess minimum av $g(\pi) = -3$. Dessutom har vi lokalt minimum vid $t = \pi/12$ och lokalt maximum vid $t = 0$. Därmed ges grafen för funktionen av



c) För att använda Newton-Raphsons metod skriver vi ekvationen som $f(x) = 0$, med $f(x) = x^4 + 2x - 1$, som har derivatan $f'(x) = 4x^3 + 2$. Med $x_0 = 0$ får vi nu i första iterationen att

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0^4 + 2 \cdot 0 - 1}{4 \cdot 0^3 + 2} = \frac{1}{2}$$

och i den andra iterationen att

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 - \frac{(1/2)^4 + 2 \cdot (1/2) - 1}{4 \cdot (1/2)^3 + 2} = \frac{19}{40}$$

För att uppskatta hur långt ifrån den verkliga lösningen x_∞ som x_2 ligger kan vi använda oss av derivatan. Eftersom $f(x_\infty) = 0$ är $\Delta y = f(x_2) - f(x_\infty) = f(x_2)$ och vi får då att $\Delta x \approx \Delta y / f'(x_0) = f(x_2)/f'(x_2)$. När vi sätter in värdet på x_2 får vi

$$\Delta x \approx \frac{(19/40)^4 + 2 \cdot (19/40) - 1}{4 \cdot (19/40)^3 + 2} \approx 4 \cdot 10^{-4}.$$

Svar:

a) $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$.

b) Funktionens maximum är $4,38$ och dess minimum är $-3,00$.

c) Ett närmevärde efter två iterationer ges av $x_2 = 19/40 = 0,475$ och felet i detta c:a $4 \cdot 10^{-4}$.

4. a) Beräkna arean av området som avgränsas av kurvorna $y = x^4$, $y = 2x^3$ och linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

b) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = xe^{-x}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

c) Bestäm ett närmevärde till integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

med hjälp av trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall. Ange svaret med två decimaler. (Observera att integranden inte är definierad i punkten $x = 0$, men har ett känt gränsvärde då x går mot noll.) **(3)**

Lösning: a) Vi behöver först se på skärningspunkterna mellan kurvorna. Dessa ges av ekvationen $x^4 = 2x^3$, som kan faktoriseras till $x^3(x-2) = 0$. Alltså är $x = 0$ och $x = 2$ de enda skärningspunkterna, varav den andra ligger utanför intervallet. Vi behöver därför dela upp beräkningen av arean i de två integralerna

$$I_1 = \int_{-1}^{0} x^4 - 2x^3\, dx$$

och

$$I_2 = \int_{0}^{1} 2x^3 - x^4\, dx.$$

Eftersom $x^4 - 2x^3$ är ett polynom ges en primitiv funktion av $x^5/5 - 2x^4/4$ och vi får

$$I_1 = \int_{-1}^{0} x^4 - 2x^3\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = 0 - 0 - \frac{(-1)^5}{5} + \frac{2(-1)^4}{4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = \frac{7}{10}$$

och

$$I_2 = \int_{0}^{1} 2x^3 - x^4\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{0}^{1} = \frac{2 \cdot 1^4}{4} - \frac{1^5}{5} - 0 + 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Alltså blir den sammanlagda arean

$$I_1 + I_2 = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1.$$

b) Om vi låter $f(x) = xe^{-x}$ vet vi att rotationskroppens volym ges av integralen

$$V = \pi \int_0^2 f(x)^2\, dx$$

eftersom vi kan tänka oss den uppbyggd av en mängd mycket tunna cirkulära skivor med radie $f(x)$. För att beräkna integralen

$$\int_0^2 x^2 e^{-2x}\, dx$$

behöver vi använda partiell integration två gånger. Vi får integrera e^{-2x} och derivera x^2, respektive x.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 e^{-2x}\, dx &= \left[x^2 \frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^2 + \int_0^2 xe^{-2x}\, dx \\
&= -4\frac{e^{-4}}{2} + 0 + \left[x\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{2}\, dx \\
&= 2e^{-4} - 2\frac{e^{-4}}{2} + 0 + \left[\frac{-e^{-2x}}{4}\right]_0^2 \\
&= -3e^{-4} - \frac{e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-13e^{-4}}{4}
\end{aligned}$$

Alltså blir volymen av rotationskroppen

$$\pi \int_0^2 f(x)^2\, dx = \pi\left(\frac{1-13e^{-4}}{4}\right)$$

volymsenheter.

c) Vi låter $f(x) = \sin(x)/x$ för $x \neq 0$ och observerar att $f(x)$ är kontinuerlig om vi låter $f(0) = 1$ eftersom gränsvärdet av $f(x)$ då x går mot noll är lika med derivatan av $\sin(x)$ för $x = 0$. Vi delar upp intervallet i fyra delar av längd $\Delta x = \pi/4$ och beräknar sedan approximationen med trapetsmetoden enligt

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx &\approx \frac{\Delta x}{2}\left(f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\frac{2}{\pi} + 2\frac{4}{\pi\sqrt{2}} + 2 + 2\frac{4}{\pi\sqrt{2}} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \approx 2,70
\end{aligned}$$

Svar:

a) Arean av området mellan graferna är 1 areaenhet.

b) Volymen av rotationskroppen är $\pi(1 - 13e^{-4})/4$ volymsenheter.

c) Trapetsmetoden ger närmevärdet $2,70$.