Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Fredagen den 25 oktober 2013, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

Öl som innehåller 6% alkohol pumpas in i ett fat, vilket innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Låt $V(t)$ och $A(t)$ vara mängden öl respektive mängden alkohol i tanken, mätta i liter, vid tiden t, mätt i minuter.
Bestäm alkoholhalten i vätskan efter 200 minuter.

Modul 2.

En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Avgör en partikels öde om den vid tiden $t = 5$ befinner sig i punkten $(-2, 4)$.

Ange även den allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Modul 3.

Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 2\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)\,du + 3\sin 2t,\ t \geq 0$.

vgv

<u>Del 2</u>

11. Bestäm en styckvis deriverbar kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)\,,\; f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < 1 \\ 0\,, & x \ge 1 \end{cases}\,,\quad y(0) = 2\,.$$

12. Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.
Det tvådimensionella hastighetsfältet beskrivs av systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(2 + x) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = (x - y)(1 - x - y) \end{cases}$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

13. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella matriselement. Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A}$ är $\lambda = \alpha + i\beta$, där α R och β R. Tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är reella vektorer.
<u>Härled</u> två reella linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

Genomför även beräkningarna för matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

14. Bestäm fourierserien till funktionen f som ges av $f(t) = \begin{cases} 0\,, & -\pi/2 < t < 0 \\ \cos t\,, & 0 \le t < \pi/2 \end{cases}$, $f(t + \pi) = f(t)$.

Bestäm därefter $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

15. P är en två gånger deriverbar funktion som uppfyller $P(0) = P'(0) = 0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + P'(x)y' + P''(x)y = P''(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.