**Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.**
Måndagen den 15 oktober 2012, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>

Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$ som uppfyller villkoret $y(0) = 9$.
Ange även lösningens existensintervall.

<u>Lösning:</u>
Den givna differentialekvationen är separabel.
a) Konstantlösningar: $y = \pm 3$. Dessa uppfyller ej villkoret.
b) Vi bestämmer nu icke-konstanta lösningar och för dessa gäller att $y \neq \pm 3$.

Omforma differentialekvationen: $\frac{1}{y^2-9}\frac{dy}{dx} = 1$ , $\frac{1}{(y+3)(y-3)}\frac{dy}{dx} = 1$ , $\left(\frac{-1}{y+3} + \frac{1}{y-3}\right)\frac{dy}{dx} = 6$.

Integrera med avseende på x: $-\ln|y+3| + \ln|y-3| = 6x + \ln|C_1|$ , $\frac{y-3}{y+3} = \pm C_1 e^{6x} = Ce^{6x}$,

Villkoret $y(0) = 9$ ger $C = \frac{9-3}{9+3} = \frac{1}{2}$ vilket ger $y = \frac{3e^{6x}+6}{2-e^{6x}}$.

Över till existensintervallet.
Det skall uppfylla villkoret $2 - e^{6x} \neq 0$ samt innehålla $x = 0$. Vi får $\left\{ x : x < \frac{\ln 2}{6} \right\}$.

SVAR: Differentialekvationen har lösningen $y = \frac{3e^{6x}+6}{2-e^{6x}}$ och existensintervallet är $\left\{ x : x < \frac{\ln 2}{6} \right\}$.

<u>Modul 2.</u>

Studera det icke-linjära systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x^2 + \frac{3}{2})y \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + 4y - 1 \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

<u>Lösning.</u>
I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} (x^2 + \frac{3}{2})y \\ x^2 + 4y - 1 \end{pmatrix}$.

De kritiska punkterna är: $(1,0)$ och $(-1,0)$.
Nu över till bestämning av de stationära punkternas karaktär. Vi linjariserar det icke-linjära systemet.
Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive stationär punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + \frac{3}{2} \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$.

Insättning av $(1,0)$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$.

Egenvärdena är reella och med olika tecken. Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(1,0)$.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Insättning av $(-1,0)$ ger $\mathbf{J}(-1,\ 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1$.

Egenvärdena är komplexa och med positiv realdel.
Det linjariserade systemet uppvisar en instabil spiral i $(-1,0)$.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De kritiska punkterna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.
$(1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(-1,0)$ är en instabil spiralpunkt.

Modul 3.

Bestäm $y(\frac{3\pi}{2})$ och $y(\frac{\pi}{2})$ då $y'' - 2y' + 2y = 3\delta(t-\pi)$ och $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) - 2sY(s) + 2Y(s) = 3e^{-s\pi}$.

Lös ut $Y(s)$: $Y(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 2}3e^{-s\pi} = \dfrac{3}{(s-1)^2 + 1}e^{-s\pi}$.

Återtransformera först $\dfrac{3}{(s-1)^2+1}$ : $L^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s-1)^2+1}\right\} = 3e^t \sin t$.

Då blir $y(t) = U(t-\pi)3e^{t-\pi}\sin(t-\pi)$.

De sökta värdena är $y(\frac{3\pi}{2}) = U(\frac{3\pi}{2} - \pi)3e^{\frac{3\pi}{2}-\pi}\sin(\frac{3\pi}{2} - \pi) = 3e^{\frac{\pi}{2}}$.

$$y(\frac{\pi}{2}) = U(\frac{\pi}{2} - \pi)3e^{\frac{\pi}{2}-\pi}\sin(\frac{\pi}{2} - \pi) = 0$$

SVAR: De sökta värdena är $y(\frac{3\pi}{2}) = 3e^{\frac{\pi}{2}}$ och $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Del 2

11. En tank som rymmer 20 liter innehåller från början 15 liter rent vatten. Vid tiden $t = 0$ pumpas en lösning in med hastigheten 5 liter/min med koncentrationen 10 gram/liter.
Samtidigt vid $t = 0$ öppnas en kran så att utflödet av tankens innehåll blir proportionellt, med proportionalitetskonstanten $k$, mot lösningens volym i tanken.
a) Ställ upp en differentialekvation som modellerar mängden salt i tanken som funktion av tiden.
b) Bestäm $\lim_{t\to\infty} A(t)$, där $A(t)$ är mängden salt i tanken vid tiden $t$, uttryckt i proportionalitetskonstanten $k$.
c) Bestäm proportionalitetskonstanten $k$ om man vet att $A(1) = \dfrac{25}{k}$ gram.

Lösning:

a) Låt $A(t)$ vara mängden salt i tanken vid tiden $t$.

Vi erhåller följande differentialekvation $\dfrac{dA(t)}{dt} = 5 \cdot 10 - kV(t) \cdot \dfrac{A(t)}{V(t)}$.

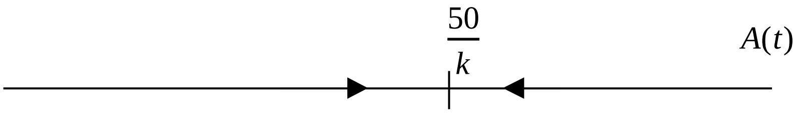
Förenkling ger $\dfrac{dA(t)}{dt} = 50 - kA(t)$.

b) Vi gör en kvalitativ analys av den autonoma differentialekvationen.

Stationär lösning är $A(t) = \dfrac{50}{k}$.

Nu över till det endimensionella fasporträttet.

För $A(t) < \frac{50}{k}$ är $\frac{dA(t)}{dt} > 0$, funktionen växer, och för $A(t) > \frac{50}{k}$ är $\frac{dA(t)}{dt} < 0$ , funktionen avtar.




Det sökta gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{50}{k}$

c) Vi löser den uppställda differentialekvationen, $\frac{dA(t)}{dt} + kA(t) = 50$. Den är linjär med konstanta koefficienter och dessa lösning erhålles som summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Den allmänna lösningen är $A(t) = Ce^{-kt} + \frac{50}{k}$ .

Vid starten finns inget salt. Detta ger $0 = A(0) = C + \frac{50}{k}$ , $C = -\frac{50}{k}$.

Vi får $A(t) = \frac{50}{k}(1 - e^{-kt})$ .

Villkoret $A(1) = \frac{25}{k}$ ger $A(1) = \frac{25}{k} = \frac{50}{k}(1 - e^{-k})$ , $\frac{1}{2} = 1 - e^{-k}$, $e^{-k} = \frac{1}{2}$ , $e^{k} = 2$ , $k = \ln 2$.

SVAR: a) $\frac{dA(t)}{dt} = 50 - kA(t)$. b) $\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{50}{k}$. c) $k = \ln 2$.

12.a) Definiera begreppet fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning två.
b) Till en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter har följande lösningar föreslagits: $y_1 = 3e^{-x} + 5e^{4x}$, $y_2 = 7e^{x^2}$, $y_3 = 4e^{-x} - 9e^{4x}$, $y_4 = 7\left(e^{2x}\right)^2$
Kommentera detta förslag samt bestäm en fundamentalmängd av lösningar.
c) Betrakta en linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter som svarar mot fundamentalmängden av lösningar i b) och med koefficienten framför andraderivatan lika med ett. Bestäm den allmänna lösningen till motsvarande inhomogena differentialekvation, då dess högerled är $g(x) = 25e^{4x}$.

Lösning:

a) $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation av ordning två om $y_1$ och $y_2$ satisfierar differentialekvationen samt är linjärt oberoende.
b) Vi söker två linjärt oberoende lösningar. Dessa lösningar är på formen $y = Ce^{rx}$ ty differentialekvationen har konstant koefficienter. Detta innebär att $y_2 = 7e^{x^2}$ ej är aktuell.
De övriga går bra. Vi väljer den enklaste uppsättningen: $y_a = e^{-x}$ och $y_b = e^{4x}$.
En fundamentalmängd av lösningar är $\{e^{-x}, e^{4x}\}$ .
Dessa lösningar satisfierar differentialekvationen $(D - (-1))(D - 4)y = 0$ dvs $y'' - 3y' - 4y = 0$ .
c) Den inhomogena differentialekvationen är $y'' - 3y' - 4y = 25e^{4x}$.
$z'' + 4z' + 4z' + 16z - 3(z' + 4z) - 4z = 25$
Vi söker en partikulärlösning.
Sätt $y = e^{4x}z$, $y' = e^{4x}z' + 4e^{4x}z$ , $y'' = e^{4x}z'' + 4e^{4x}z' + 4e^{4x}z' + 16e^{4x}z$.
$e^{4x}z'' + 4e^{4x}z' + 4e^{4x}z' + 16e^{4x}z - 3(e^{4x}z' + 4e^{4x}z) - 4e^{4x}z = 25e^{4x}$ , $z'' + 5z' = 25$.
Ansätt $z_p = cx$. Insättning ger $0 + 5c = 25$ , $c = 5$. En partikulärlösning är $y_p = 5xe^{4x}$ .
Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvation är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $y = Ae^{-x} + Be^{4x} + 5xe^{4x}$.
SVAR: a) Se ovan. b) En fundamentalmängd av lösningar är $\{e^{-x}, e^{4x}\}$ . c)
$y = Ae^{-x} + Be^{4x} + 5xe^{4x}$.

13. a. Definiera begreppet fundamentalmatris för systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
b. Härled en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av $\Phi$.

c. Bestäm en partikulärlösning till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix}$, då $0 < t < \pi$ .

<u>Lösning:</u>
a. I en fundamentalmatris består kolonnerna av n stycken linjärt oberoende lösningar till det linjära systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}$ är en nxn-matris .
b. Vi utgår från den allmänna homogena lösningen, vilken kan skrivas: $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.
En partikulärlösning ansättes som: $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}$, där $\mathbf{U}$ är en tidsberoende vektor.
Insättning i systemet av differentialekvationer ger: $\Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$.
Kolonnerna i fundamentalmatrisen $\Phi$ består av linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet. Detta innebär att varje kolonn uppfyller det homogena systemet och således uppfyller även fundamentalmatrisen detsamma, med andra ord gäller att $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.
Vi erhåller då: $\mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$ , $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$. Lös ut $\mathbf{U}'$ .
Multiplicera med fundamentalmatrisens invers. Den existerar ty $\det\Phi \neq 0$. Vi erhåller $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{F}$.
Integration ger: $\mathbf{U} = \int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$. Vi har erhållit $\mathbf{X}_p = \Phi\int \Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$.
c. Vi bestämmer först två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet och använder därefter variation av parametrar, se b., för att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet.

För att erhålla lösningar till det homogena systemet bestämmer vi egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ , $\lambda = \pm i$. Vi har erhållit komplexa egenvärden och bestämmer då en komplex egenvektor. Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = i$ .

Vi söker icke-triviala lösningar till systemet $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilka ges av $\mathbf{v} = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ , $r_1 \in R$ .

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger oss två linjärt oberoende lösningar.

Vi omformar den komplexa lösningen: $\mathbf{Z} = (\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ och $\operatorname{Im}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ är två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet.

Variation av parametrar innebär att vi behöver en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning erhålles som $\mathbf{X_p} = \Phi\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix}dt$. Inversen blir $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

$$\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\sin t} \end{pmatrix}dt = \int \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-\cos t}{\sin t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} t \\ -\ln(\sin t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_p} = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln(\sin t) \\ t\sin t + \cos t\ln(\sin t) \end{pmatrix}$$

SVAR: a. Se ovan. b. Se ovan. c. En partikulärlösning är $\mathbf{X_p} = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln(\sin t) \\ t\sin t + \cos t\ln(\sin t) \end{pmatrix}$

14 Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av u(x,t).
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0°C$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden t = 0 är stavens temperatur $u(x,0) = 4\cos 3x - 4\cos 7x$.
Detta ger upphov till följande problem:

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}\ ,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \\ u'_x(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = 4\cos 3x - 4\cos 7x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$ : $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.
Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.
Dessa är följande: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$.

| $\lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ | $X''(x) = 0$ | $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ |
| $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$ | $X(x) = A_2 x + B_2$ | $X(x) = A_3 \cos\mu x + B_3 \sin\mu x$ |

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor: $X'(0)T(t) = 0,\ \ X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0,\ \ t > 0$.

Dessa skall gälla för alla $t > 0$.

Detta ger: $X'(0) = 0$, $X(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X'(x)$.

| $\lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$ | $X(x) = A_2 x + B_2$ | $X(x) = A_3 \cos\mu x + B_3 \sin\mu x$ |
| $X'(x) = \mu(A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$ | $X'(x) = A_2$ | $X'(x) = \mu(-A_3 \sin\mu x + B_3 \cos\mu x)$ |

Insättning av villkoren ger.

| $\lambda = \mu^2,\ \mu \in R$ | $\lambda = 0$ | $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ |
|---|---|---|
| $X'(0) = \mu(A_1 - B_1) = 0$ | $X'(0) = A_2 = 0$ | $X'(0) = \mu(B_3) = 0$ |
| $X(\frac{\pi}{2}) = A_1 e^{\mu\frac{\pi}{2}} + B_1 e^{-\mu\frac{\pi}{2}} = 0$ | $X(\frac{\pi}{2}) = B_2 = 0$ | $X(\frac{\pi}{2}) = A_3 \cos\mu\frac{\pi}{2} + B_3 \sin\mu\frac{\pi}{2} = 0$ |
| $\begin{cases} B_1 = A_1 \\ A_1(e^{\mu\frac{\pi}{2}} + e^{-\mu\frac{\pi}{2}}) = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} B_2 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} B_3 = 0 \\ A_3 \cos\mu\frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ |

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$.
Då erhålles $\mu = 2n+1$ , $n \in N$ och lösningen har formen $X(x) = B_3 \cos(2n+1)x$ .

Motsvarande $t$-ekvation har lösningen $T(t) = C_3 e^{\lambda t} = C_3 e^{-(2n+1)^2 t}$.

Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen $u_n(x,t) = X(x)T(t) = B_3 C_3 \cos(2n+1)x\ \ e^{-(2n+1)^2 t}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1)^2 t}\cos(2n+1)x$ .

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0)=4\cos 3x-4\cos 7x$ .

Insättning ger: $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cos(2n+1)x = 4\cos 3x-4\cos 7x$ .

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.

Vi får $b_1=4$ och $b_3=-4$. Den sökta lösningen är $u(x,t)=4e^{-9t}\cos 3x-4e^{-49t}\cos 7x$ .

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t)=4e^{-9t}\cos 3x-4e^{-49t}\cos 7x$ .

SVAR:

15. För att exempelvis modellera bindningars vibrationer i molekyler används följande förenklade modell, $-\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}x\right)^2\Psi=\frac{1}{2}\Psi$.

a) Visa att differentialekvationen $y''+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)y=0$ kan skrivas som $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]$.

Notera att $\frac{d}{dx}(f+g)=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$ .

b) Lös $y''+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)y=0$ genom att sätta $f(x)=\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)$ i ekvationen $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]$ och sedan bestämma $f(x)$. Svaret $y(x)$ får innehålla en integral.

Lösning:

a) Ekvationen $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]$ omformas till $\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right]-\frac{x}{2}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right]=0$ .

Vi utvecklar vänstra ledet.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right]-\frac{x}{2}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right]=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{y}{2}+\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{x^2y}{4}=0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)y=0$ vsv.

b) Insättning av $f(x)=\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)$ i ekvationen $\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]=\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)\right]$ ger $\frac{df(x)}{dx}=\frac{x}{2}f(x)$.

Vi har en linjär differentialekvation ( Den är även separabel.)

Vi löser den som linjär och omformar ekvationen $\frac{df(x)}{dx}-\frac{x}{2}f(x)=0$.

En integrerande faktor är $e^{\int -\frac{x}{2}dx}=e^{-\frac{x^2}{4}}$. Multiplicera $\frac{df(x)}{dx}-\frac{x}{2}f(x)=0$ med $e^{-\frac{x^2}{4}}$ .

$e^{-\frac{x^2}{4}}\frac{df(x)}{dx}-\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}f(x)=0$ , $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{4}}f(x)\right)=0$ , $e^{-\frac{x^2}{4}}f(x)=C$ , $f(x)=Ce^{\frac{x^2}{4}}$ ..

Nu över till ekvationen $f(x)=\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}\right)$ med $f(x)=Ce^{\frac{x^2}{4}}$ .

Upprepa proceduren ovan.

$\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{2}=Ce^{\frac{x^2}{4}}$ , $e^{\frac{x^2}{4}}\frac{dy}{dx}+e^{\frac{x^2}{4}}\frac{xy}{2}=Ce^{\frac{x^2}{4}}e^{\frac{x^2}{4}}$ , $\frac{d}{dx}\left(ye^{\frac{x^2}{4}}\right)=Ce^{\frac{x^2}{2}}$ , $ye^{\frac{x^2}{4}}=C\int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx+D$ .

Vi får $y=Ce^{-\frac{x^2}{4}}\int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx+De^{-\frac{x^2}{4}}$

SVAR: a) Se ovan. b) Det sökta svaret är $y(x)=Ce^{-\frac{x^2}{4}}\int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx+De^{-\frac{x^2}{4}}$ .