

Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 11 januari 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.  
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.

För betyg E krävs 3 godkända moduler.

Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.

För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.

För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.

För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.

Tentamen är tvådelad.

Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.

För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.

Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.

För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.

Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Examinator: Hans Tranberg

Del 1

Modul 1.

Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$ ,  $y(0) = 4$ .

Undersök  $y(x)$  då  $x$  växer från startvärdet  $x_0 = 0$ .

Modul 2.

Positionen för en partikel ges av systemet  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}$  där  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ .

Vidare gäller för 2x2-matrisen  $\mathbf{A}$  följande ekvationer:  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.

Avgör även en partikels öde om den vid tiden  $t = 2$  befinner sig i punkten (2,2).

Modul 3.

Bestäm  $y(t)$  då  $y'' - 2y' + 2y = 3\delta(t - \frac{\pi}{2})$ ,  $y(0) = 1$  och  $y'(0) = 1$ .  $\delta(t)$  är Diracs deltafunktion.

Del 2

11. Beståndet,  $y(t)$ , mätt i ton, av en viss fiskart i en viss sjö antas variera periodiskt med tiden  $t$ , mätt i månader, enligt följande:

$y$ 's ändringshastighet (som kan vara både positiv och negativ) är proportionell

mot produkten av  $y$  och den periodiska faktorn  $\cos \frac{\pi t}{6}$ .

På morgonen den 17 maj (väljes som  $t = 0$ ) är  $y = 1$  ton och den 17 augusti är  $y = 3$  ton.

Bestäm  $y(t)$  som funktion av  $t$ .

Bestäm även när fiskebeståndet är minst och ange dess minsta värde.

12. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall  $0 \leq x \leq L$ ?

b. Undersök om följderna  $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots\}$  är ortogonal på intervallet  $0 \leq x \leq \pi$ .

c. Vad menas med att en reellvärd funktion  $f$  är periodisk med perioden  $T$ ?

d. Bestäm koefficienterna  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  så att  $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  då  $0 < x < \pi$ .

13. Låt  $p$  och  $q$  vara kontinuerliga på intervallet  $(a, b)$ .

Låt  $x_0$  vara en godtycklig punkt på intervallet  $(a, b)$ .

Vidare är  $y_1$  och  $y_2$  lösningar till differentialekvationen

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  på intervallet  $(a, b)$ .

Visa Abels formel  $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}$ .

$W(x)$  är Wronskianen till lösningarna  $y_1$  och  $y_2$ .

14. Bestäm den generaliserade integralen  $\int_{t=0}^{\infty} \left\{ \int_{u=0}^t \cos 2u \cdot (t-u)^2 \cdot e^{-3t} du \right\} dt$ .

15. Bestäm alla stationära lösningar till systemet  $\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 + 1) \end{cases}$ .

Klassificera om möjligt de stationära punkternas karaktär med avseende på stabilitet/instabilitet och typ (nod, spiral, centrum).

Bestäm även lösningskurvorna och speciellt den lösning som går genom punkten  $(x, y) = (3, 4)$ .