Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Måndagen den 1 februari 2010, kl 1815-1915.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - y + xy^2 = 0$ som uppfyller villkoret $y(2) = 2$.
Bestäm även lösningens existensintervall.

Lösning:

Den givna differentialekvationen är Bernoullsk.

Omformning av differentialekvationen ger: $xy^{-2}y' - y^{-1} + x = 0$.

Sätt: $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$. Vi får: $-xz' - z + x = 0$, $xz' + z = x$, $(xz)' = x$.

Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen.

Integrera map x: $xz = \frac{x^2}{2} + C$. Med $z = y^{-1}$ erhålles $xy^{-1} = \frac{x^2}{2} + C$

Villkoret $y(2) = 2$ ger: $C = -1$. $xy^{-1} = \frac{x^2 - 2}{2}$, $y = \frac{2x}{x^2 - 2}$, där $x^2 - 2 \neq 0$.

Det maximala lösningsintervallet blir $\left\{ x \;:\; x > \sqrt{2} \right\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{2x}{x^2 - 2}$

och det maximala lösningsintervallet $\left\{ x \;:\; x > \sqrt{2} \right\}$.

Modul 2.

Studera det icke-linjära systemet $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x^2 + \frac{3}{2})y \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + 4y - 1 \end{cases}$ genom att hitta alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösning.

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} (x^2 + \frac{3}{2})y \\ x^2 + 4y - 1 \end{pmatrix}$.

De kritiska punkterna är: $(1,0)$ och $(-1,0)$.

Nu över till bestämning av de stationära punkternas karaktär.

Vi linjariserar det icke-linjära systemet.

Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive stationär punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + \frac{3}{2} \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$.

Insättning av $(1,0)$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$.

Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(1,0)$.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Insättning av $(-1,0)$ ger $\mathbf{J}(-1,\,0)=\begin{pmatrix}0 & \frac{5}{2}\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\mathbf{B}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0=\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & \frac{5}{2}\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-2)^2+1$.

Egenvärdena är komplexa och med positiv realdel.
Det linjariserade systemet uppvisar en instabil spiral i $(-1,0)$.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.
SVAR: De kritiska punkterna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.
$(1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(-1,0)$ är en instabil spiralpunkt.

Modul 3.

Bestäm fourierserien för funktionen som är π-periodisk och definieras av
$f(t)=\sin^2 t$ för $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Lösning:

Fourierserien för en π-periodisk är på formen

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi t}{\pi/2}+b_n\sin\frac{n\pi t}{\pi/2}\right\}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos 2nt+b_n\sin 2nt\right\}.$$

Den givna funktionen kan omformas till $f(t)=\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2t}{2}$.

Detta är fourierserien för den givna funktionen.

SVAR: Den sökta fourierserien är $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2t}{2}$.

Anm. För den jämna funktionen ges fourierkoefficienterna av

$$b_n=0,\ a_0=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt \text{ och } a_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos 2nt\,dt.$$