Institutionen för Matematik, KTH

TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Tisdagen den 5 juni 2007, kl 14.00–19.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook*. Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Antag att f har period 2π och att $f(x) = x$ för $-\pi \le x < 0$ och $f(x) = 0$ för $0 \le x < \pi$. Bestäm f:s Fourierserie. (5 p)

2. f är en funktion i $L^1(\mathbb{R})$ som har Fouriertransformen (5 p)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega - 1 + 2i}.$$

Bestäm f.

3. Låt $L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, beteckna Laguerrepolynomen. Utveckla funktionen e^{-x} i Laguerreserie $\sum_0^\infty c_n L_n(x)$ i rummet $L^2((0,\infty), e^{-x})$. (5 p)

4. f är en funktion på $\mathbb{R}$ som definieras av (5 p)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-t)^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

för alla x. Bestäm Fouriertransformen av f.

5. En funktion f på $\mathbb{R}$ ges av (5 p)

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 4 \\ \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Bestäm derivatan i distributionsmening av f.

6. För talföljden $(a_n)_{n=0}^\infty$ gäller att $\sum_{k=0}^n 2^k a_{n-k} = 4^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Bestäm talföljden. (5 p)

7. Bestäm en lösning till problemet (6 p)

$$\begin{cases} u_{xx} = t u_t, & 0 \le x \le \pi,\ t \ge 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 1 \\ u(x,1) = (\sin x)(\cos x), & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$