Institutionen för Matematik, KTH

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 Differentialekvationer och transformer II, del 2
Onsdagen den 20 december 2006, kl 14.00–19.00

1. Fourierserien är $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, där

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n \geq 0, \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n \geq 1.$$

Härav fås

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \{\text{partiell integration}\} = \left[\frac{\sin nx}{n}x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\end{aligned}$$

för $n \geq 1$ och

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ jämnt och } n \geq 1 \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & \text{om } n \text{ udda och } n \geq 1. \end{cases}$$

Vidare är

$$\pi a_0 = \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

och $a_0 = \pi/2$. Dessutom fås med en partiell integration

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos nx}{n}x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n}\pi + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

och $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Kalla Fourierseriens summa i punkten x för $S(x)$. f är styckvis deriverbar. För $-\pi < x < \pi$ är f kontinuerlig och det följer av en känd konvergenssats att $S(x) = f(x)$ för dessa x. Dessutom följer att $S(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$. Av periodiciteten följer också att $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

2. Vi inför den inre produkten

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

i rummet $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Då fås

$$||f||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\cos x - p(x)|^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = ||\cos x - p(x)||^2.$$

Vi skall alltså minimera $||\cos x - p(x)||$ då p varierar i rummet S av polynom av grad högst 1. S spänns upp av Hermitepolynomen $H_0(x) = 1$ och $H_1(x) = 2x$, och enligt teorin fås minimum då p är ortogonala projektionen av $\cos x$ på S, d v s

$$p(x) = \frac{(\cos x, H_0)}{||H_0||^2} H_0(x) + \frac{(\cos x, H_1)}{||H_1||^2} H_1(x).$$

Enligt *BETA* är $||H_0||^2 = (H_0, H_0) = \sqrt{\pi}$. Vidare fås

$$(\cos x, H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, 2xe^{-x^2} \mathrm{d}x = 0$$

ty $\cos x \, xe^{-x^2}$ är en udda funktion. Man får också

$$\begin{aligned}(\cos x, H_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos x - i \sin x) e^{-x^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} e^{x^2} \mathrm{d}x = \mathcal{F}(e^{-x^2})(1) = \sqrt{\pi} e^{-1/4}\end{aligned}$$

enligt *BETA*, ty $\sin x \, e^{-x^2}$ är en udda funktion. Härav följer

$$p(x) = \sqrt{\pi} e^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = e^{-1/4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. För $x^2 + y^2 = 1$ fås $u(x, y) = \cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta$ ty enligt en formel i *BETA* är $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Enligt teorin är $r^n \cos n\theta$ harmonisk för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Lösningen blir därför $u = \frac{3}{4} r\cos\theta + \frac{1}{4} r^3 \cos 3\theta$ och för $x^2 + y^2 \leq 1$ fås

$$\begin{aligned}u(x, y) =& \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}r^3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = \frac{3}{4}x + r^3\cos^3\theta - \frac{3}{4}r^3\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ =& \frac{3}{4}x + x^3 - \frac{3}{4}xy^2 - \frac{3}{4}x^3 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}xy^2.\end{aligned}$$

4. Enligt Plancherels formel är

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} \mathrm{d}\omega. \tag{1}$$

Vi sätter $f(x) = e^{-|x|}$ och $g(x) = \frac{1}{x}\sin x$. Enligt *BETA* är

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2} \quad \text{och} \quad \hat{g}(\omega) = \pi\chi(\omega), \quad \text{där } \chi(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

Plancherels formel ger att den sökta integralen (1) är lika med

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} \pi\chi(\omega) \mathrm{d}\omega &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + \omega^2} \mathrm{d}\omega = 2 \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + \omega^2} \mathrm{d}\omega \\ &= 2[\arctan\omega]_0^1 = 2\arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

5. Z-transformering av $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n$ med villkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 8$ ger

$$x^2A(z) - z^2 - 8z = 8z(A(z) - 1) - 16A(z),$$

där $A(z)$ är Z-transformen av $(a_n)_0^\infty$. Härav följer $A(z)(z^2 - 8z + 16) = z^2$ och $A(z) = z^2(z-4)^{-2}$. Vidare fås

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{z}{(z-4)^2} = \frac{(z-4)+4}{(z-4)^2} = \frac{1}{z-4} + \frac{4}{(z-4)^2} \quad \text{och} \quad A(z) = \frac{z}{z-4} + \frac{4z}{(z-4)^2}.$$

Invers Z-transformering ger sedan enligt *BETA* $a_n = 4^n + n4^n = (n+1)4^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ ger $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2it} - \frac{1}{4}e^{-2it}$ och $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{2it}t - \frac{1}{4}e^{-2it}t$. t har Fouriertransformen $2\pi i\delta'(\omega)$ enligt *BETA* och $e^{iat}t$ har transformen $2\pi i\delta'(\omega - a)$ för $a \in \mathbb{R}$. Härav följer

$$\hat{f} = \pi i\delta'(\omega) - \frac{1}{4}2\pi i\delta'(\omega-2) - \frac{1}{4}2\pi i\delta'(\omega+2) = \pi i\delta'(\omega) - \frac{1}{2}\pi i\delta'(\omega-2) - \frac{1}{2}\pi i\delta'(\omega+2).$$

7. Problemet är

$$\begin{aligned}
&u_{xx} = t^2u_t, && 0 \le x \le \pi,\ t \ge 1 && (2)\\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0, && t \ge 1 && (3)\\
&u(x,1) = 2\sin x + 3\sin 2x, && 0 \le x \le \pi. && (4)
\end{aligned}$$

Vi sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$ och (2) ger $X''T = t^2XT'$ och $X''/X = t^2T'/T$. Vi sätter

$$\frac{X''}{X} = \frac{t^2T'}{T} = -\lambda,$$

där λ är en konstant. Man får $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$ och $t^2T' + \lambda T = 0$, d v s $T' + t^{-2}\lambda T = 0$. Problemet för X har lösningar $X = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, svarande mot $\lambda = n^2$. För T fås ekvationen $T' + (n^2/t^2)T = 0$. Denna ekvation har integrerande faktor $e^{-n^2/t}$ och multiplikation ger

$$e^{-n^2/t}T' + e^{-n^2/t}\frac{n^2}{t^2}T = 0 \quad \text{d v s} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-n^2/t}T) = 0.$$

Härav följer $e^{-n^2/t}T = C$ och $T = Ce^{n^2/t}$, där C är en konstant. Det följer att $u_n = A_ne^{n^2/t}\sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, uppfyller (2), (3). Även $u = \sum_1^\infty A_ne^{n^2/t}\sin nx$ uppfyller (2), (3). Här är A_n konstanter.

Villkoret (4) ger

$$u(x,1) = \sum_1^\infty A_ne^{n^2}\sin nx = 2\sin x + 3\sin 2x.$$

Härav fås $A_1e = 2$, $A_2e^4 = 3$ och $A_n = 0$ för $n \ge 3$. Man får $A_1 = 2e^{-1}$, $A_2 = 3e^{-4}$ och lösningen blir

$$u(x,t) = 2e^{-1}e^{1/t}\sin x + 3e^{-4}e^{4/t}\sin 2x.$$