Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202, DEL II
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER FÖR F2, (T, E)
3 POÄNG
Onsdagen den 25 maj 2005, kl. 14.00-19.00

Hjälpmedel: Formelsamlingen BETA
Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Ange hur många bonuspoäng du fått tillgodoräknat under kursen (högst 4 poäng). För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 krävs 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Låt δ vara en konstant som uppfyller $1/2 \leq \delta \leq 1$. Definiera en funktion f på intervallet $[-\pi, \pi]$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/\delta & \text{för } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{för } \delta < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Beräkna Fourierserien för f. Visa att serien konvergerar för alla x och bestäm seriens summa.

(5 p)

2. Sätt $f(x) = |x|^{1/3}$ för $-1 \leq x \leq 1$. Finn det polynom p av grad högst grad 2 som approximerar f bäst i $L^2(-1, 1)$, dvs. som minimerar

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \, dx.$$

(5 p)

3. Bestäm en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sådan att $a_0 = 4$, $a_1 = 23$ och

$$a_{n+2} = 9a_{n+1} - 14a_n$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(5 p)

Var god vänd!

4. Finn en lösning till integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-y^2}\,dy = e^{-x^2/8}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(5 p)

5. Låt f vara en funktion på $\mathbb{R}$ med period 2π och kontinuerlig derivata. Antag också att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Visa att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

(5 p)

6. Sätt

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -x, & -1 \le x < 1 \\ x^2, & x \ge 1. \end{cases}$$

Beräkna derivatan i distributionsmening av f.

(5 p)

7. Lös Laplace ekvationen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i rektangeln $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, med randvillkoren

$$\begin{cases} u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,0) = f_0(x) \\ u(x,1) = f_1(x). \end{cases}$$

Antag att f_0 och f_1 har Fourierutvecklingar

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \quad \text{och} \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

och uttryck svaret i termer av koefficienterna A_n och B_n.

(6p)