Förslag till lösningar till tentamensskrivning 2005-05-25 i 5B1202/2, Diff. och Trans. II, del 2

Uppgift 1. Då f är en jämn funktion fås

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \quad \text{för } n \geq 1$$

och

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Big(1-\frac{|x|}{\delta}\Big)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\delta}\cos(nx)\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)dx. \end{aligned}$$

Partiell integration ger

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin(nx)}{n}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\Big]_0^{\delta} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin(nx)}{n}\frac{1}{\delta}dx \\ &= \frac{2}{\pi\delta}\Big[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big]_0^{\delta} = \frac{2}{\pi\delta n^2}(1-\cos(n\delta)) \quad \text{för } n \geq 1. \end{aligned}$$

Vidare gäller

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\delta}dx - \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}xdx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\delta - \frac{1}{\delta}\frac{\delta^2}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\delta-\frac{\delta}{2}\Big) = \frac{\delta}{\pi}.$$

Fourierserien är

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big) = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\delta}\frac{1-\cos(n\delta)}{n^2}\cos(nx).$$

Då f är kontinuerlig och styckvis deriverbar följer av en känd sats att Fourierserien konvergerar för alla x i intervallet $[-\pi,\pi]$ och att summan är lika med $f(x)$. $\square$

Uppgift 2. Sätt $f(x) = |x|^{1/3}$ för $-1 \leq x \leq 1$. Vi skall bestämma bästa approximationen till f i rummet S av polynom av grad högst 2. Vi inför inre produkten

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

i rummet $L^2(-1,1)$. Motsvarande norm ges av

$$\|f\| = (f,f)^{1/2} = \Big(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx\Big)^{1/2}.$$

Vi skall minimera $\|f-p\|^2$ då $p \in S$ där S är det linjära delrum av $L^2(-1,1)$ som spänns upp av Legendrepolynomen P_0, P_1 och P_2. Lösningen ges av

$$p = \text{ortogonala projektionen av } f \text{ på } S.$$

Då P_0, P_1 och P_2 utgör en ortogonal bas för delrummet S av $L^2(-1,1)$ map den inre produkten ovan fås

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2}\frac{(f,P_k)}{\|P_k\|^2}P_k(x).$$

Vi har att

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{och} \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Härav följer

$$(f, P_0) = \int_{-1}^{1} |x|^{1/3} dx = 2 \int_0^1 x^{1/3} dx = 2\Big[\frac{3}{4}x^{4/3}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

och

$$\begin{aligned}(f, P_2) &= \int_{-1}^{1} |x|^{1/3} \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \int_0^1 x^{1/3}(3x^2 - 1) dx = \int_0^1 (3x^{7/3} - x^{1/3}) dx \\ &= \Big[3\frac{3}{10}x^{10/3} - \frac{3}{4}x^{4/3}\Big]_0^1 = \frac{9}{10} - \frac{3}{4} = \frac{18 - 15}{20} = \frac{3}{20}.\end{aligned}$$

$(f, P_1) = 0$ ty f jämn och P_1 udda medför att fP_1 är udda. Enligt BETA gäller

$$\|P_n\|^2 = 2/(2n + 1),$$

vilket ger $\|P_0\|^2 = 2$ och $\|P_2\|^2 = 2/5$. Härav följer

$$\begin{aligned}p(x) &= \frac{(f, P_0)}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{(f, P_2)}{\|P_2\|^2} P_2(x) = \frac{3/2}{2} + \frac{3/20}{2/5}\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{16}(3x^2 - 1) = \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

□

Uppgift 3. Låt $\{a_n\}_0^\infty$ ha z-transform $A(z)$. Då har $\{a_{n+1}\}_0^\infty$ z-transform $zA(z) - 4z$ och $\{a_{n+2}\}_0^\infty$ har z-transform $z^2A(z) - 4z^2 - 23z$. z-transformering av formeln $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 14a_n$ ger

$$z^2 A(z) - 4z^2 - 23z = 9zA(z) - 36z - 14A(z)$$

och man får $A(z)(z^2 - 9z + 14) = 4z^2 - 13z$. Härav följer

$$A(z) = \frac{z(4z - 13)}{(z - 7)(z - 2)}$$

och

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{4z - 13}{(z - 7)(z - 2)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{A(z)}{z} = \frac{3}{z - 7} + \frac{1}{z - 2}$$

och man får

$$A(z) = \frac{3z}{z - 7} + \frac{z}{z - 2}.$$

Invers z-transformering ger

$$a_n = 3 \cdot 7^n + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

□

Uppgift 4. Funktionen e^{-at^2} har Fouriertransform $\sqrt{\pi/a}\,e^{-\omega^2/(4a)}$ för $a > 0$ enligt BETA s. 314. $a = 1$ ger att e^{-t^2} har Fouriertransform $\sqrt{\pi}\,e^{-\omega^2/4}$. $a = 1/8$ ger att $e^{-t^2/8}$ har Fouriertransform

$$\sqrt{\frac{\pi}{1/8}}\,e^{-\omega^2/(1/2)} = \sqrt{8\pi}e^{-2\omega^2}.$$

Integralekvationen kan skrivas $f * e^{-x^2} = e^{-x^2/8}$ och Fouriertransformering ger

$$\hat{f}(\omega)\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} = \sqrt{8\pi}e^{-2\omega^2}.$$

Härav följer $\hat{f}(\omega) = 2\sqrt{2}e^{-7\omega^2/4}$. Enligt BETA s. 314 har $e^{-a\omega^2}$ invers Fouriertransform

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-t^2/(4a)}.$$

Härav följer

$$f(t) = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi\,7/4}}e^{-t^2/7} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7\pi}}e^{-t^2/7}.$$

$\square$

Uppgift 5. Låt f och f' ha Fourierkoefficienter $\widehat{f}(n)$ och $\widehat{f'}(n)$. Då gäller $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$ för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Då $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ följer också att $\widehat{f}(0) = 0$. Härav följer att

$$|\widehat{f}(n)| \leq |n||\widehat{f}(n)| = |in\widehat{f}(n)| = |\widehat{f'}(n)| \quad \text{för } n \in \mathbb{Z},$$

vilket ger

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2. \tag{1}$$

Parsevals formel medför att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \tag{2}$$

och

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2. \tag{3}$$

(1), (2) och (3) ger

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

$\square$

Uppgift 6. Funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 1 \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Härav följer att

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 1 \\ 2x, & x > 1, \end{cases}$$

där $f'(x)$ betecknar derivatan av f i punkten x. Definiera en funktion g genom

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Definitionen av derivata i distributionsmening ger för $\varphi \in \mathcal{S}$ att

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} (-x)\varphi'(x)dx - \int_{1}^{\infty} x^2\varphi'(x)dx$$

$$= [\text{partiell integration}] = [\varphi(x)x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx - [\varphi(x)x^2]_1^{\infty}$$

$$+ \int_1^{\infty} \varphi(x)2xdx = \varphi(1) + \varphi(-1) - \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx + \varphi(1) + \int_1^{\infty} 2x\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(-1) + 2\varphi(1) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx = \delta_{-1}(\varphi) + 2\delta_1(\varphi) + g(\varphi).$$

Härav följer att $f' = \delta_{-1} + 2\delta_1 + g$ där f' är derivatan i distributionsmening av f. (Här definieras distributionen δ_a av $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.) $\square$

Uppgift 7. Vi sätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$ och Laplaceekvationen ger $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ och

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

Man får

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{och} \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

Problemet för X har icke-triviala lösningar för $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, och lösningarna är $X_n(x) = \sin(nx)$. Problemet för Y har motsvarande lösningar

$$Y_n(y) = C_n e^{ny} + D_n e^{-ny}$$

där C_n och D_n är konstanter. Om vi sätter

$$u(x,y) = \sum_1^{\infty} (C_n e^{ny} + D_n e^{-ny}) \sin(nx)$$

så uppfyller u ekvationen $\Delta u = 0$ och randvillkoret $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$. De två övriga randvillkoren ger

$$u(x,0) = \sum_1^{\infty} (C_n + D_n) \sin(nx) = f_0(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin(nx)$$

och

$$u(x,1) = \sum_1^{\infty} (C_n e^n + D_n e^{-n}) \sin(nx) = f_1(x) = \sum_1^{\infty} B_n \sin(nx).$$

Konstanterna C_n och D_n skall därför uppfylla

$$\begin{cases} C_n + D_n = A_n \\ C_n e^n + D_n e^{-n} = B_n. \end{cases}$$

Vi löser ut C_n och D_n och får

$$\begin{cases} C_n = \frac{B_n - A_n e^{-n}}{e^n - e^{-n}} \\ D_n = \frac{A_n e^n - B_n}{e^n - e^{-n}}. \end{cases}$$

Härav följer

$$\begin{aligned} C_n e^{ny} + D_n e^{-ny} &= \frac{B_n e^{ny} - A_n e^{ny} e^{-n} + A_n e^n e^{-ny} - B_n e^{-ny}}{2\sinh(n)} \\ &= \frac{A_n e^{n(1-y)} - A_n e^{-n(1-y)}}{2\sinh(n)} + \frac{B_n 2\sinh(ny)}{2\sinh(n)} \\ &= A_n \frac{\sinh(n(1-y))}{\sinh(n)} + B_n \frac{\sinh(ny)}{\sinh(n)} \end{aligned}$$

och lösningen blir

$$u(x,y) = \sum_1^\infty \left(A_n \frac{\sinh(n(1-y))}{\sinh(n)} + B_n \frac{\sinh(ny)}{\sinh(n)} \right) \sin(nx).$$

□