

## TENTAMENSSKRIVNING

5B1202 DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II, DEL 1  
ONSDAGEN DEN 10 JANUARI 2007, KL 14.00–19.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook*. Tentamen består av 6 uppgifter, som ger totalt högst 19 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: för betyg 3 krävs 9 poäng, för betyg 4 krävs 13 poäng, för betyg 5 krävs 17 poäng och för komplettering krävs 8 p.

1. Lös problemet (3 p)

$$xy' + (x - 2)y = e^{-x}, \quad y(1) = 1,$$

i ett intervall kring  $x = 1$ .

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (3 p)

$$y'' - 2y' + y = e^x \ln x, \quad x > 0.$$

3. Finn en lösning till problemet (3 p)

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t y(t-u)e^{-2u} du = 1, & t \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Bestäm den lösning till systemet (3 p)

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 9x + y \end{cases}$$

som uppfyller  $x(0) = 4$  och  $y(0) = 0$ . Undersök stabilitet och asymptotisk stabilitet av den kritiska punkten  $(0, 0)$ . Ange också typen av den kritiska punkten  $(0, 0)$ .

5. Bestäm banorna och de kritiska punkterna till det autonoma systemet (3 p)

$$\begin{cases} x' = (x - y)(y - 4) \\ y' = (y - x)(x - 4). \end{cases}$$

Skissera banorna i ett fasporträtt. Ange deras riktning.

6. Differentialekvationen  $2xy'' + (1 + 3x)y' + 2y = 0$  har på intervallet  $0 < x < 1$  (4 p)  
lösningarna

$$x^{r_1} \left( 1 + \sum_1^{\infty} a_n x^n \right) \quad \text{och} \quad x^{r_2} \left( 1 + \sum_1^{\infty} b_n x^n \right).$$

Här är  $r_1$  och  $r_2$  reella och  $r_1 > r_2$ . Bestäm  $r_1$ ,  $r_2$  och koefficienterna  $b_1$ ,  $b_2$ .