Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamen 2010-08-19 i Flervariabelanalys (SF1626); SF1601 (5B1105) Diff- och integralkalkyl I, del 2; och SF1655 Webbaserad kurs i flervariabelanalys

Augusti 2010

1. *Beräkna riktningsderivatan i riktningen* $(1, 1)$ *till funktionen* $f(x, y) = e^{-(x-y)^2}$ *i punkten* $(x, y) = (1, 2)$.

Svar. Vi har

$$f'_x(x, y) = -2(x-y)e^{-(x-y)^2}$$
$$f'_y(x, y) = 2(x-y)e^{-(x-y)^2}.$$

Låt $\bar{v} = 2^{-1/2}(1, 1)$. Då blir riktningderivatan $f'_{\bar{v}}(1, 2) = \bar{v} \cdot \mathrm{grad} f(1, 2) = 2^{-1/2}(2e^{-1} - 2e^{-1}) = 0$.

2. *Skriv mängden*

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, z^2 - 4x^2 - y^2 = 0, \quad z \leq 0\}$$

som en funktionsgraf.

Svar. Av ekvationen $z^2 - 4x^2 - y^2 = 0$ har vi att $z = \pm\sqrt{4x^2 + y^2}$. Vi har vidare att $z \leq 0$, vilket ger att mängden H är funktionsgrafen till funktionen $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som skickar $(x, y) \mapsto -\sqrt{4x^2 + y^2}$.

3a. *Bestäm den linjära approximationen till funktionen* $f(x, y) = x^2y + x + y + 1$ *i en omgivning till punkten* $(x, y) = (1, 1)$.
3b. *Uppskatta approximationens fel i området* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; y = 1,\; |x - 1| \leq \frac{1}{4}\}$.

Svar 3a. Vi har

$$f'_x(x, y) = 2xy + 1$$
$$f'_y(x, y) = x^2 + 1$$

vilket ger $f(1, 1) = 4$, $f'_x(1, 1) = 3$ och $f'_y(1, 1) = 2$, så att den linjära approximationen är $z = 4 + 3(x - 1) + 2(y - 1)$.

Svar 3b. Taylors formel ger

$$f(x, 1) = 4 + 3(x - 1) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\xi, 1)(x - 1)^2,$$

för någon punkt $(\xi, 1)$ på linjen mellan $(1, 1)$ och $(x, 1)$, så felet $|f(x, 1) - 4 - 3(x - 1)|$ är begränsat av $\frac{1}{2}2(x - 1)^2 \leq 1/16$.

4. *Området D bestäms av olikheterna $x \geq 0$ och $y \geq 3x$. Beräkna den generaliserade integralen*

$$\iint_D \exp(-y^2)\ dxdy.$$

Svar. Vi definierar området D_n med olikheterna $x \geq 0,\ n \geq y \geq 3x$. Detta ger att

$$\iint_D \exp(-y^2)\ dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \exp(-y^2)\ dxdy.$$

Vi skriver D_n som mängden $0 \leq y \leq n$, och $0 \leq x \leq \frac{1}{3}y$. Itererad integrering ger

$$\iint_{D_n} \exp(-y^2)\ dxdy = \int_0^n (\int_0^{\frac{1}{3}y} \exp(-y^2)dx)dy = \int_0^n \frac{1}{3}y\exp(-y^2)dy = [-\frac{1}{6}\exp(-y^2)]_0^n.$$

Integralen över området D_n blir $\frac{1}{6}(1-\exp(-n^2))$, och det följer att den sökta integralen är $\frac{1}{6}$.

5. *Ellipsoiden $4x^2+9y^2+z^2 = 97$ och konen $x^2+4y^2-z^2 = 0$ går båda genom punkten $(3,2,5)$. Bestäm en tangentvektor till ytornas skärningskurva i $(3,2,5)$.*

Svar. Låt $f(x,y,z) = 4x^2+9y^2+z^2$ och $g(x,y,z) = x^2+4y^2-z^2$. Då är i punkten (x,y,z) vektorn $\mathrm{grad}f(x,y,z)$ normal till nivåytan $f(x,y,z) = 97$ och $\mathrm{grad}g(x,y,z)$ normal till nivåytan $g(x,y,z) = 0$. Tangentvektorn är vinkelrät mot båda dessa normalvektorer och därför parallell med vektorprodukten $\mathrm{grad}f(x,y,z) \times \mathrm{grad}g(x,y,z)$.

Vi har

$$\mathrm{grad}f(x,y,z) = (8x, 18y, 2z)$$
$$\mathrm{grad}g(x,y,z) = (2x, 8y, -2z)$$

vilket i punkten $(3,2,5)$ ger tangentriktningen

$$\mathrm{grad}f(3,2,5) \times \mathrm{grad}g(3,2,5) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 24 & 36 & 10 \\ 6 & 16 & -10 \end{vmatrix} = (-520, 300, 168).$$

6. *Beräkna volymen av kroppen som begränsas av paraboloiden $z = x^2+y^2$ och konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Svar. Vi ser att volymen begränsas av

$$x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

och att

$$0 \leq x^2+y^2 \leq 1,$$

eftersom ytorna skär varandra i punkten $x^2+y^2 = 0$ och på cirkeln $x^2+y^2 = 1$. Med polära koordinater blir volymen

$$2\pi\int_0^1 (\int_{r^2}^r dz)rdr = 2\pi\int_0^1 (r^2-r^3)dr = 2\pi[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

7. *Bestäm punkten* (x, y, z) *på ytan* $z = e^{-(x^2+y^2)/2}$ *som ligger närmast origo.*

Svar. Avståndet till origo är $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi ska därför minimera $x^2 + y^2 + e^{-(x^2+y^2)}$ över $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Låt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ och minimera $f(r) = r^2 + e^{-r^2}$. Vi har $f'(r) = 2r(1 - e^{-r^2}) \geq 0$. Funktionen f är därför växande med ett minimum i $r = 0$. Det minsta avståndet är då $\sqrt{f(0)} = 1$.

8. Låt f vara en differentierbar funktion. Figur 1 visar definitionsområdet till funktionen, med några nivåkurvor inritade. I området mellan de angivna nivåkurvorna antar funktionen bara mellanliggande värden.
8a. Ange i figuren de punkter (x, y) sådana att funktionsvärdet i dessa punkter är 1. (1 poäng)
8b. Ange i figuren punkterna där $\partial f/\partial y = 0$. (1 poäng)
8c. Ange i figuren punkterna där $\partial f/\partial x < 0$. (2 poäng)

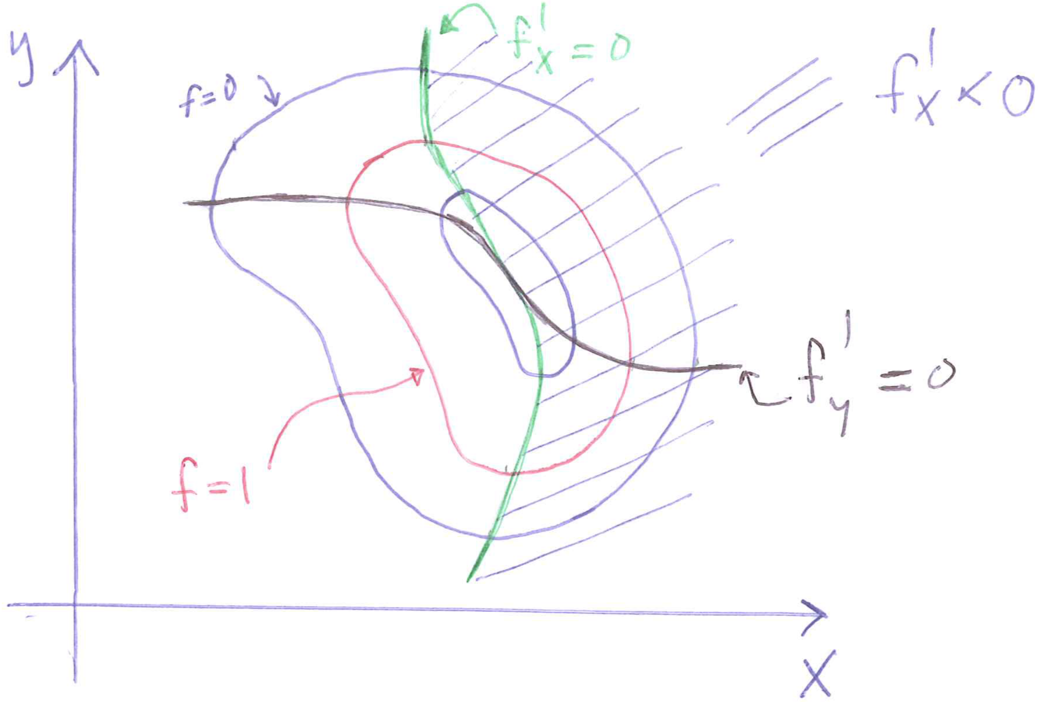

FIGURE 1. En möjlig lösning av tal 8.

Svar 8a. Mängden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x, y) = 1\}$ är den röda kurvan i figuren.

Svar 8b. Villkoret $f'_y(x, y) = 0$ betyder att gradienten är i riktningen $(1, 0)$. Gradienten är vinkelrät mot nivåkurvan så vi söker punkter där nivåkurvan är vertikal. Detta är den svarta kurvan i figuren.

Svar 8c. I de punkter där $f'_x(x,y) = 0$ är nivåkurvan $f(x,y) = c$ horisontell. Dessa punkter bildar en kurva (grön). Till vänster om denna kurva är $f'_x(x,y) > 0$ och till höger är $f'_x(x,y) < 0$, vilket är den sökta streckade blå mängden.

9. *Nollställemängden till ekvationen $4x^2 + 9y^2 = 13$ beskriver en ellips E. Kurvan γ börjar i punkten $(-1,1)$ och följer ellipsbågen E medurs fram till punkten $(-1,-1)$. Beräkna*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

när $\mathbf{F}$ är vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$.

Svar. Vi ser att $\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$, där F_1 och F_2 är komponenterna till vektorfältet F. Vektorfältet F är ej definierat i $(0,0)$. Betrakta cirkeln med radie $\sqrt{2}$, och centrerad i origo. Cirkeln går genom de två punkterna $A = (-1,1)$ och $B = (-1,-1)$. Vi låter δ vara den delen av cirkeln som går från B till A, moturs. Kurvan δ parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)) \quad t \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi].$$

Kurvan γ sammansatt med kurvan δ avgränsar ett området R. Då origo inte är med i R kommer vektorfältet $\mathbf{F}$ vara konservativt på R, och Greens sats ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_\delta \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}\int_\delta \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{(-\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t))}{(\sqrt{2}\cos(t))^2 + (\sqrt{2}\sin(t))^2} \cdot (-\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t))dt \\ &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)}{2\sin^2(t) + 2\cos^2(t)} dt = \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} 1 dt = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Vilket betyder att den sökta integralen är $-\frac{3}{2}\pi$.

10. *För vilka $a \in \mathbb{R}$ kan $\mathbf{F}(x,y) = (y, ax)$ vara gradient? Ge exempel på en kurvintegralegenskap som gäller speciellt för vektorfält som är gradienter.*

Svar. Ett nödvändigt villkor för att $\mathbf{F} = (P,Q)$ ska vara gradient är att $P'_y = Q'_x$, vilket ger $1 = a$. Vi kan nu bestämma en potential U sådan att $U'_x(x,y) = y$ och $U'_y(x,y) = x$, ty integration i x-led ger $U(x,y) = xy + f(y)$ för någon funktion f. Derivering ger sedan $U'_y(x,y) = x + f'(y)$ och vi ser att $U(x,y) = xy$ är en potential till $\mathbf{F}$, dvs. $\mathbf{F}$ är gradienten av U.

Kurvintegraler $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = (U'_x, U'_y)$ kan skrivas $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\gamma_1) - U(\gamma_2)$ om kurvan γ börjar i γ_2 och slutar i γ_1; dvs kurvintegralen är oberoende av vägen.