KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Onsdagen den 9 januari, 2013

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Bengt Ek, Maria Saprykina

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. Bonuspoäng tillgodoräknas vid de upp till två första tentamina man skriver under läsåret. Kontrollskrivning i svarar då mot uppgift i ($i = 1, 2$) och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C. För de högsta betygen, A och B, krävs vissa poäng på del C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Låt funktionen f ges av
$$f(x) = e^{\frac{x^2-x+1}{x}}.$$
   (a) Avgör på vilka intervall f är definierad. **(1p)**
   (b) Avgör på vilka intervall f är växande. **(1p)**
   (c) Bestäm höger- och vänstergränsvärdena för f då $x \to 0$. **(1p)**
   (d) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar och om det gör det, bestäm det. **(1p)**

2. Beräkna integralen **(4p)**
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

3. Finn med hjälp av Taylor-/Maclaurinutveckling ett närmevärde till $\cos(\frac{1}{2})$ med ett fel som till beloppet är mindre än $0,003$. **(4p)**

Del B

4. Vid tillverkning av en keramisk produkt tas den ur ugnen vid temperaturen 800°C och sätts att svalna i rumstemperatur.
Professor P vid Smockholts universitet föreslår följande matematiska modell för avsvalningsförloppet:
$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{10}(T-20), \\ T(0) = 800. \end{cases} \qquad (*)$$
($T(t)$ är här produktens temperatur vid tidpunkten t minuter efter uttaget ur ugnen.)
   (a) Lös initialvärdesproblemet $(*)$. **(3p)**
   (b) Diskutera modellens rimlighet. **(1p)**

5. Finn alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$, $x > -1$, genom att först utföra variabelbytet $t = \sqrt{x+1}$. Svaret skall uttryckas i variabeln x. **(4p)**

6. Låt
$$f(x) = -3\ln(|x|) + \frac{x^2+2x-2}{x}.$$
   (a) Bestäm alla lokala extrempunkter och deras värden för funktionen f. **(3p)**
   (b) Finn antalet lösningar x till ekvationen $f(x) = 2$. **(1p)**

DEL C

7. Formulera och bevisa l'Hospitals regel för beräkning av gränsvärden av formen

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Glöm inte att ange villkor för funktionerna f och g. **(4p)**

8. (a) Betrakta en grafkurva $y = y(x),\ a \leq x \leq b$. **(2p)**
Ställ upp en integral vars värde ger kurvans längd och motivera varför den gör det.
(b) Beräkna längden av kurvan **(2p)**

$$y(x) = \int_0^x \sqrt{\cos(2t)}\,dt,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

9. (a) Avgör om följande serie är konvergent eller divergent **(2p)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\, e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

(b) Avgör om följande integral är konvergent eller divergent **(2p)**

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}}\,dx.$$