KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 18:e oktober, 2011

Skrivtid: 8:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $x \geq 0$ och $y \geq 0$ vara två tal vars summa är 6. Ange det minimala värdet som uttrycket $2x^2 + y^2$ kan anta.

2. Lös integralen
$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$
(Tips: Använd lämpligt variabelbyte.)

3. En stillastående bil startar från ett trafikljus och ökar farten med konstant acceleration upp tills farten är 25 m/s. Därefter fortsätter bilen med den konstanta hastigheten 25 m/s. Efter 23 s har bilen tillryggalagt sträckan 500 m. Hur lång tid efter starten nådde bilen farten 25 m/s?

DEL B

4. Visa att $e^x \geq 1 + \sin x$, för varje $x \geq 0$.

5. Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$
   (a) Visa att $y(x) = xe^{-x}$ är en lösning till differentialekvationen. **(1)**
   (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen. **(1)**
   (c) Beräkna gränsvärdena
   $$\lim_{x\to\infty} y(x) \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x)$$
   i fallet då $y(x)$ löser differentialekvationen och $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$. **(2)**

6. (a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 i punkten $x = 0$ (dvs Maclaurinpolynomet) till funktionen $f(x) = (1+x)^{3/2}$. **(2)**
   (b) Kalla polynomet som vi fick i (6a) för $P(x)$. Om vi använder detta polynom för att approximera värdet $(1+a)^{3/2}$ för tal a i intervallet $[-1/2, 1/2]$, kan vi då vara säkra på att felet, dvs $\left|P(a) - (1+a)^{3/2}\right|$, alltid blir mindre än $1/5$? **(2)**

DEL C

7. (a) Visa att
$$\int_0^1 e^{x^2} \sin 5x \, dx \leq 10.$$
(2)

(b) Visa att det finns ett tal N sådant att
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2 - 1}{1 + n^2 + \log n} \geq 100.$$
(2)

8. (a) På vilket sätt är integralen
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/3}} dx$$
generaliserad? **(1)**

(b) Avgör om integralen är konvergent eller divergent. **(3)**

9. Ett tal M sägs vara en **övre begränsning** till en mängd A om $M \geq x$ för varje $x \in A$. Ett tal S sägs vara **supremum** av en mängd A om S är den minsta övre begränsningen till A.

Antag att
$$A = \left\{ \frac{4n^2}{n^2 + 1} : n \geq 0 \text{ är ett heltal} \right\}.$$
Visa att supremum av A är 4.