KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra II
Tentamen den 26 augusti 2008 kl 14-19

Inga hjälpmedel. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Uppgifterna 1-2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j ger automatiskt 4 poäng på uppgift nummer j (som då inte ska lösas).

Uppgifterna 3-6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.

Uppgifterna 7-10 är mer avancerade och poängen som delas ut på dessa uppgifter är VG-poäng. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal VG-poäng.

Preliminära betygsgränser: A - 36 poäng varav minst 11 VG-poäng, B - 31 poäng varav minst 7 VG-poäng, C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng, D - 21 poäng, E - 20 poäng, Fx - 18 poäng. Lycka till!!

För poäng krävs tydliga lösningar med ordentliga motiveringar. Lycka till!

——————————-Uppgifter som motsvarar varsin KS——————————-

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Avgör om det finns någon matris C sådan att $C^{-1}AC$ är en diagonalmatris.

2. Beräkna integralen $\iint_D y^2\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : 4x^2 + 4y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

——————————- G-uppgifter——————————-

3. Låt $f(x,y) = \dfrac{2e^{4y}}{x} - \ln(xy+1)$. Gör nu två saker:
A. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(2,0,1)$ till ytan med ekvation $z = f(x,y)$.
B. Beräkna ett närmevärde till $f(9/5, -1/5)$ genom att använda Taylorpolynomet av första graden till f i punkten $(2,0)$. (Felet behöver ej uppskattas.)

4. A. Bestäm, om så är möjligt, en potentialfunktion till kraftfältet $\mathbf{F}(x,y) = (x^3 - 3xy^2,\ y^3 - 3x^2y)$ i $\mathbf{R}^2$.
B. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar längs linjen $3x + 2y = 0$ från origo till punkten $(2,-3)$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2}$ ut genom cylinderytan som beskrivs av $x^2 + y^2 = 2,\ -2 \leq z \leq 2$.

6. Avgör om $f(x,y) = e^{xy}(1 - \arctan(x^2 + 2y^2))$ har en lokal extrempunkt i origo.

————————- VG-uppgifter————————-

7. Om ytan $z = x^2 + xy + 10$, $5x^2 + y^2 \leq 5$, beskriver ett terrängavsnitt i en bergskedja – var i terrängavsnittet, och i vilken riktning, är bergets lutning störst?

8. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som i en omgivning av origo bäst approximerar

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xe^{yz} + 2y \\ \ln(1 - y^2) + y + z \\ \sin(xy + 3z) \end{pmatrix}$$

och avgör om $\mathbf{F}$ är lokalt inverterbar nära origo. Om så är fallet: kan du skriva upp eller approximera inversen?

9. Bestäm masscentrum för den homogena kropp K som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Tips: masscentrums koordinater (x_m, y_m, z_m) ges av

$$x_m = \frac{\iiint_K x\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}, \quad y_m = \frac{\iiint_K y\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}, \quad z_m = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}.$$

10. Formulera och bevisa Greens formel för det fall då området är kvadraten som ges av olikheterna $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.