KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

KORTFATTAT LÖSNINGSFÖRSLAG TILL
SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra II
Tentamen den 26 augusti 2008 kl 14-19

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Avgör om det finns någon matris C sådan att $C^{-1}AC$ är en diagonalmatris.

Lösning: Då $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$ ser vi att matrisen har 3 olika egenvärden. Och eftersom olika egenvärden hör till linjärt oberoende egenvektorer finns alltså en bas bestående av egenvektorer till A som därför kan diagonaliseras.
Svar Ja

2. Beräkna integralen $\iint_D y^2\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : 4x^2 + 4y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

Lösning: D är en halvcirkelskiva med radie $1/2$. Vi går över till polära koordinater, använder att $\sin^2 v = (1 - \cos 2v)/2$ och får att

$$\iint_D y^2\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{1/2} r^3 \sin^2 v dr dv = \frac{1}{64}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2v}{2} dv = \frac{\pi}{128}.$$

Svar: $\frac{\pi}{128}$.

3. Låt $f(x,y) = \dfrac{2e^{4y}}{x} - \ln(xy+1)$. Gör nu två saker:
A. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(2,0,1)$ till ytan med ekvation $z = f(x,y)$.
B. Beräkna ett närmevärde till $f(9/5, -1/5)$ genom att använda Taylorpolynomet av första graden till f i punkten $(2,0)$. (Felet behöver ej uppskattas.)

Lösning: A. Vi deriverar och får $\partial f/\partial x = -2e^{4y}/x^2 - y/(xy+1)$, vilket betyder att $\partial f/\partial x(2,0) = -1/2$, och $\partial f/\partial y = 8e^{4y}/x - x/(xy+1)$, vilket betyder att $\partial f/\partial y(2,0) = 2$. Tangentplanets ekvation kan alltså skrivas $z = 1-(1/2)(x-2)+2y$.
B. Eftersom uttrycket till höger om likhetsteckning i tangentplanets ekvation ovan är

precis första gradens Taylorpolynom till f får vi det sökta närmevärdet: $f(9/5, -1/5)$ är ungefär lika med $1 - (1/2)(9/5 - 2) + 2(-1/5) = 7/10$.
Svar: A. $z = 1 - (1/2)(x - 2) + 2y$. B. $7/10$.

4. A. Bestäm, om så är möjligt, en potentialfunktion till kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 3xy^2,\ y^3 - 3x^2y)$ i $\mathbf{R}^2$.
B. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbf{F}$ uträttar längs linjen $3x + 2y = 0$ från origo till punkten $(2, -3)$.

Lösning: A. En eventuell potentialfunktion U uppfylla att $\partial U/\partial x = x^3 - 3xy^2$ och integrering av detta ger att i så fall måste $U(x, y) = x^4/4 - 3x^2y^2/2 + g(y)$ för någon funktion g. Derivering av U med avseende på y och jämförelse mellan detta och $y^3 - 3x^2y$ ger att vi kan välja $g(y) = y^4/4$ och få att $U(x, y) = x^4/4 + y^4/4 - 3x^2y^2/2$ är en potentialfunktion. B. Nu kan vi beräkna den givna kurvintegralen genom $U(2, -3) - U(0, 0) = -119/4$.
Svar: A. $U(x, y) = x^4/4 + y^4/4 - 3x^2y^2/2$ B. $-119/4$.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{(x, y, z)}{x^2 + y^2}$ ut genom cylinderytan som beskrivs av $x^2 + y^2 = 2$, $-2 \leq z \leq 2$.

Svar: 8π. För lösning se övningsboken sid 185.

6. Avgör om $f(x, y) = e^{xy}(1 - \arctan(x^2 + 2y^2))$ har en lokal extrempunkt i origo.

Lösning: Funktionen är tre gånger kontinuerligt deriverbar i hela planet. Vi Taylorutvecklar e^{xy} och $1 - \arctan(x^2 + 2y^2)$ och får enligt entyghetssatsen (alternativt kan vi derivera den givna funktionen som den står och få samma resultat) att Taylorpolynomet av grad 2 till f runt origo ges av

$$TP(x, y) = 1 + xy - x^2 - 2y^2 = 1 - (x - y/2)^2 - (15/4)y^2$$

Första ordningens derivator av f är båda 0 och den kvadratiska formen är negativt definit. Origo är alltså en lokal maxpunkt.

SVar: Ja, Lokalt max.

7. Om ytan $z = x^2 + xy + 10$, $5x^2 + y^2 \leq 5$, beskriver ett terrängavsnitt i en bergskedja – var i terrängavsnittet, och i vilken riktning, är bergets lutning störst?

Lösning: Sätt $f(x, y) = x^2 + xy + 10$. Lutningen i olika riktningar ges av riktningsderivatan till f, som i sin tur är mindre än eller lika med längden av gradienten. Vi söker alltså de punkter där $|grad\, f|$ maximeras. Vi har att

$$|grad\, f(x, y)| = |(2x + y, x)| = \sqrt{5x^2 + y^2 + 4xy}.$$

Eftersom kvadratrotsfunktionen är monoton räcker det att maximera uttrycket, som vi kan kalla g, under rottecknet. Vi ska alltså maximera $g(x,y) = 5x^2 + y^2 + 4xy$ när $5x^2 + y^2 \leq 5$. Vi ser att funktionen är kontinuerlig och området kompakt, och därför måste ett största värde finnas och det måste antas på randen eller i en kritisk punkt (det finns inga singulära punkter). Vi deriverar först g och får att de partiella derivatorna är noll i origo och endast i origo. För (x,y) på randen gäller att $5x^2 + y^2 = 5$ dvs $y = \pm\sqrt{5-5x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ och för sådana punkter är $g(x,y) = 5 \pm 4x\sqrt{5-5x^2} = h(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Dennaa envariabelfunktion (egentligen två funktioner, en för + och en för -) är deriverbar på hela det öppna intervallet mellan -1 och 1 och kontinuerlig ända ut till ändpunkterna varför max finns och antas antingen i en kritisk punkt eller i en ändpunkt. Vi deriverar och får $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 80x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi har alltså två kritiska punkter, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ och två ändpunkter $x = \pm 1$. För vår funktion g betyder detta att max tas i någon av punkterna $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $\pm(1/\sqrt{2}, \sqrt{5/2})$. Jämför vi funktionsvärdena i dessa punkter ser vi att max är $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ som antas i punkterna $\pm(1/\sqrt{2}, \sqrt{5/2})$. som alltså är de punkter på berget där lutningen är störst. Riktningen ges av *grad* f i dessa punkter och är $\pm(1/\sqrt{2})(2+\sqrt{5}, 1)$.

SVar: Lutningen är störst i $\pm(1/\sqrt{2}, \sqrt{5/2}$. i riktningarna (respektive) $\pm(1/\sqrt{2})(2+\sqrt{5}, 1)$.

8. Bestäm avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som i en omgivning av origo bäst approximerar

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xe^{yz} + 2y \\ \ln(1-y^2) + y + z \\ \sin(xy + 3z) \end{pmatrix}$$

och avgör om $\mathbf{F}$ är lokalt inverterbar nära origo. Om så är fallet: kan du skriva upp eller approximera inversen?

Lösning: Jacobimatrisen för $\mathbf{F}$ är

$$\mathbf{J_F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{yz} & xze^{yz} + 2 & xye^{yz} \\ 0 & \frac{-2y}{(1-y^2)} + 1 & 1 \\ y\cos(xy+3z) & x\cos(xy+3z) & 3\cos(xy+3z) \end{pmatrix}.$$

I origo får vi

$$\mathbf{J_F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vilket är avbildningsmatrisen för den linjära avbildning som bäst approximerar vår $\mathbf{F}$ nära origo. Eftersom determinanten av denna matris är 3 vilket är skilt från noll så är matrisen och därmed den linjära avbildningen inverterbar. Det följer att även $\mathbf{F}$ är inverterbar lokalt. Inversen kan jag inte skriva upp men jag kan approximera den. Eftersom $(J_F^{-1}) = (J_F)^{-1}$ har vi (efter lite Gausselimination) att den linjära avbildning som bäst approximerar inversen har avbildningsmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

9. Bestäm masscentrum för den homogena kropp K som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \le z^2 \le 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$. Tips: masscentrums koordinater (x_m, y_m, z_m) ges av

$$x_m = \frac{\iiint_K x\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}, \quad y_m = \frac{\iiint_K y\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}, \quad z_m = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}.$$

Svar: $(0, 0, (3/16)(2 + \sqrt{2}))$. För lösning se övningsboken sid 144.

10. Formulera och bevisa Greens formel för det fall då området är kvadraten som ges av olikheterna $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

Se läroboken sidan 335-336.