KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

**SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra II**
**Tentamen den 19 maj 2008 kl 8-13**

Inga hjälpmedel. Alla uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Uppgifterna 1-2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer $j$ ger automatiskt 4 poäng på uppgift $j$ (som då inte ska lösas). Uppgifterna 3-6 tar upp grundläggande kunskaper och färdigheter.

Uppgifterna 7-10 är lite mer avancerade. Poängen som delas ut på dessa uppgifter är VG-poäng. Den som vill ha betyg C eller högre måste samla ett antal VG-poäng.

Preliminära betygsgränser: A - 36 poäng varav minst 11 VG-poäng, B - 31 poäng varav minst 7 VG-poäng, C - 25 poäng varav minst 3 VG-poäng, D - 21 poäng, E - 20 poäng, Fx - 18 poäng.

Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar. Lycka till!!

——————-Uppgifter som motsvarar varsin KS——————

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Bestäm, om möjligt, en matris $C$ och en diagonal matris $D$ så att $D = C^{-1}AC$.
2. Beräkna volymen av den begränsade kropp $K$ i xyz-rymden som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 2x$.

————————- G-uppgifter————————-

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = ye^{xy-2} + 1$ i punkten $(1, 2, 3)$. Låt sedan $f(x, y) = ye^{xy-2} + 1$ och använd ekvationen för tangentplanet (linjär approximation) för att beräkna ett närmevärde till $f(9/10, 12/5)$.
4. Beräkna det arbete som vektorfältet $\mathbf{F} = ((1 + xy)e^{xy},\ x^2e^{xy} + y^3)$ utför längs den del av kurvan $y = 4 - x^2$ som ligger i övre halvplanet $(y \geq 0)$ genomlöpt med start i $(2, 0)$ och slut i $(-2, 0)$.
5. Beräkna minsta avståndet till origo från planet $3x + 2y - z = 10$ på två olika sätt: A. Utan hjälp av derivering. B. Med hjälp av derivering.
6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 1 + 2y, 3 + 4z)$ ut ur cylindern som ges av $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$. Var är flödet störst - genom mantelytan $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ eller genom någon av de båda cirkelskivorna $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$ ?

——————————- VG-uppgifter——————————-

7. Du får följande information om en funktion $f$, vars partiella derivator av ordning tre existerar och är kontinuerliga i hela $\mathbf{R}^2$:

$f(1,2) = 1\,,\quad f(-1,1) = 2\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 5\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 10\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 5\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1) = 1\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) = 3\,.$

Bestäm Taylorpolynomen av grad 2 till $f$ i de båda punkterna $(1,2)$ och $(-1,1)$. Är det möjligt att med den givna informationen avgöra om $f$ har ett lokalt minimum i någon av de båda punkterna? Gör det i så fall.

8. Beräkna masscentrum för den ändliga homogena kropp $K$ som begränsas av ytorna $z = 2 - x^2 - y^2$ och $z = y^2$. Tips: masscentrums koordinater $(x_m, y_m, z_m)$ ges av

$$x_m = \frac{\iiint_K x\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}, \quad y_m \text{ och } z_m \text{ analogt.}$$

9. Ge den matematiska definitionen av begreppet riktningsderivata, dvs definiera matematiskt vad som menas med derivatan i riktningen $\mathbf{v}$ av en reellvärd funktion $f$ i en punkt $\mathbf{a}$ i $\mathbf{R}^n$. Formulera och bevisa sedan den sats som säger att riktningsderivatan kan beräknas genom att man tar skalärprodukten mellan gradienten till $f$ och vektorn $\mathbf{v}$.

10. Ett nytt samarbete ska starta mellan Östermalms Tekniska Högskola och Smockholts Universitet som går ut på att de två anrika lärosätena ska skapa en cykeluthyrning tillsammans. Det blir två uthyrningsställen, ett på ÖTH och ett på SU. Man får hyra cykel på morgonen på valfritt uthyrningsställe och lämna tillbaka den på kvällen vid valfritt uthyrningsställe. Enligt en djuplodande undersökning som gjorts kommer 88 procent av de cyklar som finns vid SU en given morgon innan uthyrningen börjar att finnas kvar vid SU nästa morgon innan uthyrningen börjar, medan 12 procent av de cyklar som finns vid SU en given morgon kommer att finnas vid ÖTH nästa morgon. På samma sätt finns 92 procent av de cyklar som finns vid ÖTH en given morgon kvar vid ÖTH nästa morgon medan 8 procent då återfinns på SU. Professor Per Bil vid Smockholts Universitet påstår att det här betyder att alla cyklar till slut kommer att finnas vid ÖTH. Har han rätt? Ställ upp undersökningens resultat som en matrismodell för hur många cyklar som finns vid SU respektive ÖTH efter $n$ dagar och beräkna gränsvärdet då $n$ går mot oändligheten. Anta att det finns 100 cyklar på varje ställe när uthyrningen börjar dag 0.