LÖSNINGSFÖRSLAG
SF1621 Analytiska metoder och linjär algebra II
Tentamen den 19 maj 2008 kl 8-13

1. **Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Bestäm, om möjligt, en matris C och en diagonal matris D så att $D = C^{-1}AC$.**

Eftersom A är symmetrisk är det klart att det går. Den karaktäristiska ekvationen $(3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = 0$ har lösningar ± 5 som alltså är egenvärden till matrisen A. För egenvärdet 5 löser vi ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 4 & -3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och ser att $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor hörande till detta egenvärde. På liknande sätt fås att $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor hörande till egenvärdet -5. Det följer nu att vi kan välja de sökta matriserna som $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2. **Beräkna volymen av den begränsade kropp K i xyz-rymden som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 2x$.**

De båda ytorna skär varandra när $x^2+y^2 = 2x$ dvs när $(x-1)^2+y^2 = 1$. Projektionen på xy-planet av K är alltså mängden D av de punkter (x, y) som uppfyller $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Vi får den sökta volymen som:

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \iint_D (2x - x^2 - y^2)\, dxdy = \{x = 1 + r\cos v,\ y = r\sin v\} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2)\, rdr \right) dv = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. **Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = ye^{xy-2} + 1$ i punkten $(1, 2, 3)$. Låt sedan $f(x, y) = ye^{xy-2} + 1$ och använd ekvationen för tangentplanet (linjär approximation) för att beräkna ett närmevärde till $f(9/10, 12/5)$.**

Vi söker tangentplanet till $z = f(x, y)$. Vi deriverar och får $\partial f/\partial x = y^2e^{xy-2}$, som i den aktuella punkten har värdet 4, och $\partial f/\partial x = e^{xy-2} + xye^{xy-2}$, som i den aktuella punkten har värdet 3. Ekvationen för tangentplanet blir alltså $z =$

$3 + 4(x-1) + 3(y-2)$ vilket också kan skrivas $4x + 3y - z = 7$ om man hellre vill det. Den sökta linjära approximationen säger att $f(9/10, 12/5)$ ungefär är lika med $3 + 4(-1/10) + 3(2/5) = 19/5$

4. **Beräkna det arbete som vektorfältet $\mathbf{F} = ((1+xy)e^{xy}, x^2e^{xy} + y^3)$ utför längs den del av kurvan $y = 4 - x^2$ som ligger i övre halvplanet ($y \geq 0$) genomlöpt med start i $(2,0)$ och slut i $(-2,0)$.**

Om det finns en potentialfunktion $U(x,y)$ så måste

$$U(x,y) = \int (x^2e^{xy} + y^3)\,dy = xe^{xy} + \frac{y^4}{4} + C(x)$$

där den godtyckliga funktionen C i så fall kan bestämmas ur $\partial U/\partial x = (1+xy)e^{xy}$. Vi ser att $C = 0$ funkar och $U(x,y) = xe^{xy} + y^4/4$ är en potentialfunktion till det aktuella vektorfältet. Det sökta arbetet A fås nu genom

$$A = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(-2,0) - U(2,0) = -4.$$

(Det är också möjligt att lösa uppgiften genom att byta väg, men då måste man först kolla att villkoret $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ är uppfyllt.)

5. **Beräkna minsta avståndet till origo från planet $3x + 2y - z = 10$ på två olika sätt: A. Utan hjälp av derivering. B. Med hjälp av derivering.**

A. Planet har normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ så den punkt på planet som ligger närmast origo kan fås som $t\mathbf{n}$ för något tal t. Insättning i planets ekvation ger $9t + 4t + t = 10$, dvs $t = 5/7$. Närmsta punktens koordinater är alltså $(15/7, 10/7, -5/7)$ och det sökta avståndet är $\sqrt{50/7}$.

B. Vi använder Lagranges metod för att hitta minimum av $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ under bivillkoret $g(x,y,z) = 3x + 2y - z - 10 = 0$. Detta minimum är kvadraten på det sökta avståndet. Det är klart att minimum finns eftersom f är kontinuerlig överallt och vi kan utesluta alla punkter utanför något stort slutet klot runt origo och de punkter inne i det klotet som uppfyller att $g = 0$ utgör en kompakt mängd. Eftersom båda dessa funktioner är C^1 och har nollskilda gradienter utanför origo måste i en optimal punkt gälla att $grad\, f = \lambda grad\, g$ för något tal λ. Det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x = 3\lambda \\ 2y = 2\lambda \\ 2z = -\lambda \\ 3x + 2y - z - 10 = 0 \end{cases}$$

vilket kan lösas genom att man ersätter λ överallt med y (enl andra ekvationen) och z i den tredje ekvationen med $3x + 2y - 10$ (enl fjärde ekvationen). Det ger lösningen $x = 15/7$, $y = 10/7$, $z = -5/7$ och det minsta värdet för f är $50/7$. Minsta avståndet alltså $\sqrt{50/7}$.

(En alternativ lösning för B är att lösa ut $z = 3x + 2y - 10$ på planet och sedan minimera $f(x, y, 3x + 2y - 10) = x^2 + y^2 + (3x + 2y - 10)^2 = h(x, y)$ - jag ger inte detaljerna här, svaret blir detsamma.)

6. **Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 1 + 2y, 3 + 4z)$ ut ur cylindern som ges av $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$. Var är flödet störst - genom mantelytan $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ eller genom någon av de båda cirkelskivorna $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$?**

Kalla cylindern C. Det sökta flödet kan beräknas med divergenssatsen till

$$\iint_{\partial C} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_C div\mathbf{u}\, dxdydz = \iiint_C 7\, dxdydz = 7\pi.$$

På bottencirkelskivan D är $z = 0$ och $\mathbf{N} = (0, 0, -1)$ vilket ger att flödet ut genom den är $\iint_D -3\, dS = -3\pi$. (Negativt flöde betyder inflöde.)
På toppcirkelskivan T är $z = 1$ och $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ vilket ger att flödet ut genom den är $\iint_T 7\, dS = 7\pi$.
Det följer av detta att flödet ut genom mantelytan är 3π. Största flödet sker genom toppcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1$.

7. **Du får följande information om en funktion f, vars partiella derivator av ordning tre existerar och är kontinuerliga i hela $\mathbf{R}^2$:**
$f(1,2)=1\,,\quad f(-1,1)=2\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=0\,,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=1$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)=2\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=5\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)=10\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=1$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)=5\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1)=1\,,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)=3$ **.**
Bestäm Taylorpolynomen av grad 2 till f i de båda punkterna $(1,2)$ och $(-1,1)$. Är det möjligt att med den givna informationen avgöra om f har ett lokalt minimum i någon av de båda punkterna? Gör det i så fall.

Vi får de båda Taylorpolynomen:

$$P_{(1,2)}(h,k)=1+\frac{1}{2}(5h^2+20hk+k^2)$$

och

$$P_{(-1,1)}(h,k)=2+h+2k+\frac{1}{2}(5h^2+2hk+3k^2)$$

I punkten $(-1,1)$ är $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$ nollskilda. Därför kan det INTE vara en lokal minpunkt.

I punkten $(1,2)$ är första ordningens partiella derivator noll så vi går vidare och studerar den kvadratiska formen. Karaktäristiska ekvationen $(5-\lambda)(1-\lambda)-100=0$ har lösning $\lambda=3\pm\sqrt{95}$, dvs ett positivt och ett negativt egenvärde. Detta är alltså en sadelpunkt och INTE en lokal minpunkt.

8. **Beräkna masscentrum för den ändliga homogena kropp K som begränsas av ytorna $z=2-x^2-y^2$ och $z=y^2$. Tips: masscentrums koordinater (x_m,y_m,z_m) ges av**

$$x_m=\frac{\iiint_K x\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz},\quad y_m \text{ **och** } z_m \text{ **analogt.**}$$

Med hjälp av ett symmetriresonemang (eller med hjälp av att resp integral räknas ut) fås att $x_m=y_m=0$. Återstår z_m. Först tar vi nämnaren, dvs volymen av K. De båda ytorna skär varandra när $2-x^2-y^2=y^2$ dvs när $x^2+2y^2=2$. Projektionen av K på xy-planet är alltså $x^2+2y^2\le 2$, som vi kan kalla D. Volymen av K är:

$$\iiint_K dxdydz = \iint_D (2 - x^2 - 2y^2)\, dxdy = \{x = \sqrt{2}r\cos v,\ y = r\sin v\}$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2 - 2r^2)\sqrt{2}rdr \right) dv = \sqrt{2}\pi.$$

Sedan ger vi oss på täljaren:

$$\iiint_K z\, dxdydz = \iint_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_{y^2}^{2-x^2-y^2} dxdy = \iint_D ((2 - x^2 - y^2)^2 - y^4)\, dxdy =$$
$$\{x = \sqrt{2}r\cos v,\ y = r\sin v\}$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2 - 2r^2(1 + \cos 2v)/2)(2 - 2r^2)\sqrt{2}rdr \right) dv = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.$$

(Vid något av de sista likhetstecknen användes den trigonometriska formeln $\cos^2 v = (1 + \cos 2v)/2$ samt att integralen av $\cos 2v$ över intervallet från 0 till 2π är noll.)

Vi ser att masscentrums koordinater blir $(0, 0, 5/6)$.

9. **Ge den matematiska definitionen av begreppet riktningsderivata, dvs definiera matematiskt vad som menas med derivatan i riktningen v av en reellvärd funktion f i en punkt a i $\mathbf{R}^n$. Formulera och bevisa sedan den sats som säger att riktningsderivatan kan beräknas genom att man tar skalärprodukten mellan gradienten till f och vektorn v.**

Se kursboken.

10. **Ett nytt samarbete ska starta mellan Östermalms Tekniska Högskola och Smockholts Universitet som går ut på att de två anrika lärosätena ska skapa en cykeluthyrning tillsammans. Det blir två uthyrningsställen, ett på ÖTH och ett på SU. Man får hyra cykel på morgonen på valfritt uthyrningsställe och lämna tillbaka den på kvällen vid valfritt uthyrningsställe. Enligt en djuplodande undersökning som gjorts kommer 88 procent av de cyklar som finns vid SU en given morgon innan uthyrningen börjar att finnas kvar vid SU nästa morgon innan uthyrningen börjar, medan 12 procent av de cyklar som finns vid SU en given morgon kommer att finnas vid ÖTH nästa morgon. På samma sätt finns 92 procent av de cyklar som finns vid ÖTH en given morgon kvar vid ÖTH nästa morgon medan 8 procent då återfinns på SU. Professor Per Bil vid Smockholts Universitet påstår att det här betyder att alla cyklar till slut kommer att finnas vid ÖTH. Har han rätt? Ställ upp undersökningens resultat som en matrismodell för hur många cyklar som finns vid SU respektive ÖTH efter n dagar och beräkna gränsvärdet då n går mot oändligheten. Anta att det finns 100 cyklar på varje ställe när uthyrningen börjar dag 0.**

Om vi låter x_n beteckna antalet cyklar vid SU dag n och y_n antalet cyklar vid ÖTH dag n så är $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ och

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,88 & 0,08 \\ 0,12 & 0,92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,88 & 0,08 \\ 0,12 & 0,92 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0,88 & 0,08 \\ 0,12 & 0,92 \end{pmatrix}^n \left[\frac{200}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{100}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{200}{5} \cdot 1^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{100}{5} \cdot 0,8^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

vilket har gränsvärdet $\begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix}$ när n går mot oändligheten. Per Bil har alltså fel, på lång sikt kommer det att finnas 80 cyklar vid SU och 120 cyklar vid ÖTH.

PS. I de sista två likheterna i uträkningen har använts att 2×2-matrisen har egenvärden 1 och $0,8$ (beräknade precis som i uppgift 1 ovan) med egenvektorer $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, samt att begynnelsevektorn $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ får koordinater $200/5$ resp $100/5$ om dessa egenvektorer används som bas.