Lösningar till tentamen i kurs SF1619(5B1133) och SF1621(5B1141)
Analytiska metoder och linjär algebra II, 130107.

Linjär algebra

1. Standardmatrisen är $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow T^{-1}$ existerar.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(2,5)=(3,-1).$$

2. Matrisen ges av $[T]=[T_3][T_2][T_1]$ där $[T_1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, [T_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ och

$[T_3]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Matrismultiplikation ger $[T]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$.

3. 3. Vi diagonaliserar A : Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 6\\ -3 & -(5+\lambda)\end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+5)+18=\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=-2,1.$$ Egenvektorer söks:

$$\lambda=-2: \quad \begin{bmatrix}6 & 6 & 0\\ -3 & -3 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}t$$

$$\lambda=1: \quad \begin{bmatrix}3 & 6 & 0\\ -3 & -6 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}t$$

Vi väljer $t=1$ i båda fallen och får

$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$. Då är $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Ur detta fås

$$A=PDP^{-1} \Rightarrow A^7=PD^7P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^7 & 0\\ 0 & 1^7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}130 & 258\\ -129 & -258\end{bmatrix}.$$

4. S är linjärt oberoende mängd om
$C_1A\bar{v}_1+C_2A\bar{v}_2+\ldots+C_nA\bar{v}_n=\bar{0} \Rightarrow C_i=0$, $i=1,2,3,\ldots,n$. Ekvationen kan skrivas
$A(C_1\bar{v}_1+C_2\bar{v}_2+\ldots+C_n\bar{v}_n)=\bar{0}$. Multiplikation med A^{-1} från vänster ger
$C_1\bar{v}_1+C_2\bar{v}_2+\ldots+C_n\bar{v}_n=A^{-1}\bar{0}=\bar{0}$. $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{v}_n\}$ linjärt oberoende mängd ger att
$C_i=0$, $i=1,2,3,\ldots,n$ och beviset är klart.

Flervariabelanalys

5. Vi provar att gå in mot origo längs $x-$axeln:

$y=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Vi går in längs linjen $y = x$:

$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{2x^2} = 2.$ Eftersom dessa två vägar in mot origo ger olika resultat existerar inte gränsvärdet.

6. Riktningsderivatan ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\|\bar{u}\| = 1$. Denna är störst då $\bar{u} = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

$\nabla f = (\dfrac{1}{1+(x+y)^2} + ye^{xy}, \dfrac{1}{1+(x+y)^2} + xe^{xy}) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$. Det ger $\bar{u} = \dfrac{(1,3)}{\sqrt{10}}$.

7. $F_1 = x^2 + y,\ F_2 = x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0$. Det ger att fältet är konservativt.

Vi kan då byta väg och väljer den räta linjen mellan origo och punkten (-1,2) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = -2dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-1} (t^2 - 2t + (t + 4t^2)(-2))dt = -\int_0^{-1} (7t^2 + 4t)dt = \frac{1}{3}.$$

Man kan också använda potentialen $\phi(x,y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy$: $\phi(-1,2) - \phi(0,0) = \dfrac{1}{3}$.

8. Divergenssatsen : $\oiint_S \bar{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K div\bar{F} dxdydz$ där K är det inneslutna området.

$div(xy + z, y - y^2, x + yz) = y + 1 - 2y + y = 1$. Det gör att flödet ges av K:s volym V .

Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$ Kurvans projektion på xy – planet fås genom att eliminera z ur systemet vilket ger $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 + y^2$ dvs en cirkel med ekvationen $x^2 + y^2 = 4$. Låt D vara området innanför denna cirkel. Då gäller att $V = \iint_D (8 - x^2 + y^2 - (x^2 + 3y^2))dxdy = 2\iint_D (4 - (x^2 + y^2))\,dxdy$. Polära koordinater ger

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi .$$

9. Den övre delen av konen (där $z \geq 0$) är funktionsytan $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Projektionen på xy - planet av ytstycket i fråga är det obegränsade området $0 \leq x \leq \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 3$. Arean ges då av den generaliserade integralen

$$\int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{(f_1)^2+(f_2)^2+1}\,dy = \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}\,dy =$$

$$= \int_3^\infty dx \int_0^{1/x^2} \sqrt{2}\,dy = \sqrt{2}\int_3^\infty \frac{dx}{x^2} = \sqrt{2}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_3^R = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

10. Vi definierar $F(x,y,z,u) = z^2 + zu - u^2 - x$ och $G(x,y,z,u) = 2zu + u^2 - y$. Den givna punkten uppfyller då systemet $\begin{cases} F(x,y,z,u) = 0 \\ G(x,y,z,u) = 0 \end{cases}$. Vi beräknar Jacobimatrisen $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)} = \begin{bmatrix} 2z+u & z-2u \\ 2u & 2z+2u \end{bmatrix}$ som i den givna punkten är $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Då dess determinant är $14 \neq 0$ är existensen av de två funktionerna klar enligt ”implicita funktionssaten”. De båda sökta derivatorna kan fås genom implicit derivering map x resp y i systemet ovan. Detta kan göras var för sig eller på matrisnivå:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,u)}\frac{\partial(z,u)}{\partial(x,y)} = O \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z+u & z-2u \\ 2u & 2z+2u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I den givna punkten fås $\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ vilket ger

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{7}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{3}{14}$.