

**Lösningar till tentamen i kurserna SF1619(5B1133) och SF1621(5B1141)
Analytiska metoder och linjär algebra II 120816.**

Linjär algebra

1. Standardmatrisens kolumner ges av $T(\bar{e}_1)$ och $T(\bar{e}_2)$. Detta ger $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ som har determinantvärdet $1 \neq 0 \Rightarrow T$ är injektiv.

2. Vektorerna bildar en bas om och endast om följande determinant inte är 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{-R_1 + R_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{utv. efter } K_3\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Vektorerna bildar alltså en bas för alla värden på a .

3. Vi söker matrisens egenvärden:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 1, 2. \text{ Egenvektorerna fås:}$$

$$\lambda = -1: \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t, t \neq 0.$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, t \neq 0.$$

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t, t \neq 0.$$

Eftersom de tre egenvärdena är olika så är matrisen diagonaliserbar.

4. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A \bar{x} + K \bar{x} + 8 = 0$ där $\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$ och

$K = [50 \ 100]$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} \lambda - 7 & 24 \\ 24 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 625 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 25. \text{ Normerade egenvektore söks:}$$

$$\lambda = 25: \begin{bmatrix} 18 & 24 & 0 \\ 24 & 32 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -25: \begin{bmatrix} -32 & 24 & 0 \\ 24 & -18 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') + 8 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T A P) \bar{x}' + K P \bar{x}' + 8 = 0. \text{ Då } P^T A P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$$

och $KP = [50 \ 100] \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = [-20 \ 110]$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [-20 \ 110] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 8 = 0 \Rightarrow 25(x')^2 - 25(y')^2 - 20x' + 110y' + 8 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger $(x' - \frac{2}{5})^2 - (y' - \frac{11}{5})^2 + 5 = 0$. Med koordinatbytet

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{5} \\ y'' = y' - \frac{11}{5} \end{cases} \text{ som är en translation fås slutligen } \frac{(y'')^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{(x'')^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \text{ dvs kurvan är en hyperbel.}$$

Flervariabelanalys

5. $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$, $\|\bar{u}\| = 1$ dvs $\bar{u} = \frac{(3,4)}{5}$.

$$f_1 = \frac{2x - 6y}{1 + x^2 - 6xy + 8y^2}, \quad f_2 = \frac{-6x + 16y}{1 + x^2 - 6xy + 8y^2}. \text{ Detta ger } \nabla f(2,1) = (-2,4). \text{ Vi får}$$

$$D_{\bar{u}} f(2,1) = (-2,4) \cdot \frac{(3,4)}{5} = 2. \text{ Riktningensderivatan är störst då riktningsvektorn och}$$

gradientvektorn har samma riktning. Då fås $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \|\nabla f\|$. I punkten (2,1)

är alltså det maximala värdet $\|(-2,4)\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

6. Vi använder Lagranges multiplikator metod och bildar funktionen

$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + x + y^2 + y - 4)$. Vi söker dess kritiska punkter:

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2x + 1) = 0 \\ 1 + \lambda(2y + 1) = 0 \\ x^2 + x + y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \text{ Ur första och andra ekv fås } x = y \text{ som i den tredje ger}$$

$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, -2$. Det ger punkterna (1,1) och (-2,-2) där f antar det största värdet 2 resp det minsta värdet -4.

7. Vi ser att området ligger i första kvadranten och begränsas av kurvan $y = \sqrt{x}$, linjen $y = 1$ och y -axeln. Området är både x - och y -simpelt och vi kan då iterera om integralen och får:

$$\int_0^1 e^{y^3} dy \int_0^{y^2} dx = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

$$8. \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 e^{xy} + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x e^{xy} + (1+xy)e^{xy}) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} - (x e^{xy} + (1+xy)x e^{xy}) = 0.$$

Vektorfältet är alltså konservativt och vi kan byta väg. Vi väljer att gå längs x -axeln:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}, \quad t: 2 \rightarrow -2. \quad \text{Det ger integralen } \int_2^{-2} 1 dt = -4.$$

9. Gradienten är definierad endast för skalärfält och divergens och rotation endast för vektorfält. Därför är det enda meningsfulla uttrycket

$$\begin{aligned} \text{rotgrad} f &= \text{rot}(2xy - \sin z, x^2 - e^y, -x \cos z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - \sin z & x^2 - e^y & -x \cos z \end{vmatrix} = \\ &= (0, \cos z - \cos z, 2x - 2x) = \bar{0}. \end{aligned}$$

10. Vi sluter ytan S genom att lägga till den plana cirkelskivan $S_1: x^2 + y^2 \leq 1$ i xy -planet och kan då använda divergenssatsen:

$$\oiint_{S+S_1} \bar{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_R \text{div} \bar{F} dx dy dz = \iiint_R (2xy + 1 - y) dx dy dz = \{\text{symm}\} = \iiint_R dx dy dz = V \quad \text{där } V$$

är volymen av det inneslutna området R som är ett halvklot. Vi får $V = \frac{1}{2} \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Från detta måste vi nu dra bort flödet ner genom ytan S_1 :

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \bar{F} \cdot \hat{N} dS &= \iint_{S_1} (x^2 y, y, x^2) \cdot (0, 0, -1) dS = \iint_{S_1} (-x^2) dS = - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \int_0^1 r^2 r dr = \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Det sökta flödet är alltså $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{11\pi}{12}$.