Lösningar till tentamen i kurserna SF1619(5B1133) och SF1621(5B1141)
Analytiska metoder och linjär algebra II 110823.

Linjär algebra

1.

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\12\\6\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\\-16\\20\end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix}3\\4\\-5\end{bmatrix}$$

På samma sätt analyseras vektorn $(2,-3,1)$. Resultatet är att den 1:a och sista vektorn är egenvektorer med egenvärdena 1 resp -4 . Den andra och tredje vektorn är inte egenvektorer till matrisen.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\2&6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-6)-4=\lambda^2-9\lambda+14=0\Rightarrow\lambda=2,7.$$

$\lambda=2:\ \begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}t,\ -\infty<t<+\infty$

$\lambda=7:\ \begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ Det ger egenvektorerna $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}t,\ -\infty<t<+\infty$

En matris som diagonaliserar A är då $P=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$ som ger diagonalmatrisen $\begin{bmatrix}2&0\\0&7\end{bmatrix}$.

3. För att avgöra om vektorerna är linjärt oberoende eller inte löser vi ekvationssystemet

$\begin{bmatrix}1&2&-2&0\\4&3&0&0\\1&0&1&0\\3&2&1&0\end{bmatrix}\to\dots\to\begin{bmatrix}1&2&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. Entydig lösning ger att vektorerna är linjärt oberoende. För att se om vektorn $(1,0,2,3)$ är en linjärkombination av vektorerna i S löser vi systemet

$\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\4&3&0&0\\1&0&1&2\\3&2&1&3\end{bmatrix}\to\dots\to\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\0&1&-1&4\\0&0&1&9\\0&0&0&-11\end{bmatrix}$. Den sista raden visar att systemet är inkonsistent dvs $(1,0,2,3)\notin Span(S)$.

4. T är linjär eftersom

1. $T(\bar{u}_1+\bar{u}_2)=(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\times\bar{v}=\bar{u}_1\times\bar{v}+\bar{u}_2\times\bar{v}=T(\bar{u}_1)+T(\bar{u}_2)$ och

2. $T(k\bar{u})=(k\bar{u})\times\bar{v}=k(\bar{u}\times\bar{v})=kT(\bar{u})$

gäller för all reella tal k och alla vektorer $\bar{u}$.

Standardmatrisens kolumner utgörs av

$T(\bar{e}_1)$, $T(\bar{e}_2)$, $T(\bar{e}_3)$. Dessa beräknas:
$T(\bar{e}_1) = (1,0,0)\times(a,b,c) = ... = (0,-c,b)$, $T(\bar{e}_2) = (0,1,0)\times(a,b,c) = ... = (c,0,-a)$ och
$T(\bar{e}_3) = (0,0,1)\times(a,b,c)?... = (-b,a,0)$. Detta ger standardmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Flervariabelanalys

5. Vi använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial y} , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}\frac{\partial f}{\partial x} \text{ och}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{s}{u^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$. Insättning visar att den givna ekvationen är uppfylld.

6. Riktningsderivatan ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där riktningsvektorn $\bar{u}$ har längden 1 .

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (e^{x-y}, -e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,-1) \ , \ \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \text{ som ger}$$

$$D_{\bar{u}} f = (1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 0$$. Riktningsderivatan är maximal då riktningsvektorn är den normerade gradientvektorn dvs då $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. I det fallet får riktningsderivatan värdet $\sqrt{2}$ dvs det finns ingen riktning i vilken riktningsderivatan i origo antar värdet 3 .

7. Vi får

$$\iint_D y\sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \int_{x^2}^{2-x^2} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}((2-x^2)^2 - x^4)\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x^{1/2} - x^{5/2})\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{7}x^{7/2}\right]_0^1 = ... = \frac{16}{21} .$$

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Vi studerar först det inre:

$\begin{cases} f_1 = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_2 = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,Y) = (0,0)$, $(1,1)$ där endast $(1,1)$ är en inre punkt i vilken f antar värdet -1 . Vi undersöker nu de fyra räta linjer som utgör områdets rand:

1. $y = 0 : f(x,0) = x^3$. f växer från värdet 0 i origo till värdet 64 vid $x = 4$.
2. $x = 0 : f(0,y) = y^3$. f växer från värdet 0 i origo till värdet 64 vid $y = 4$.
3. $x = 4 : f(4,y) = 64 - 12y + y^3$ som har minimivärdet 48 i punkten $(4,2)$.
4. $y = 4 : f(x,4) = 64 - 12x + x^3$ som har minimivärdet 48 i punkten $(2,4)$.

Intressanta är också hörnpunkterna som är ändpunkter vid respektive envariabelanalys på de fyra kantlinjerna:
$f(0,0) = 0$, $f(4,0) = f(0,4) = 64$, $f(4,4) = 80$. Slutsatsen blir att det största värdet är 80 och det minsta är -1 .

9. Eftersom $\frac{\partial}{\partial x}(x + 3y^2 \sin x) = \frac{\partial}{\partial y}(y^3 \cos x + y)$ är vektorfältet konservativt och därmed får vi byta väg mellan cirkelbågens ändpunkter. Vi väljer att gå längs koordinataxlarna:
$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_1^0 0\,dt = 0$. $C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 0\,dt$. Linjeintegralens värde är alltså 0.

10. $rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y^3 \cos z & x^3 e^z & xyz \end{vmatrix} = (xz - x^3 e^z, x + y^3 \sin z - yz, 3x^2 e^z + 3y^2 \cos z)$.

Ytan S : s ekvation kan skrivas $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(z-1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ dvs den är en ellipsoid med centrum i punkten $(0,0,1)$. Endast den del som är ovanför $xy-$planet är aktuell. Vi vill använda divergenssatsen och lägger till den cirkelskiva D som fås då $z = 0$ dvs $x^2 + y^2 \le 4$. $divrot\overline{F} = z - 3x^2 e^z + 3y^2 \sin z - z + 3x^2 e^z - 3y^2 \sin z = 0$. Om det inneslutna området kallas K får vi enligt divergenssatsen:
$\oint\!\!\oint_{S+D} (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K divrot\overline{F} dxdydz = 0 \Rightarrow \iint_S (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS = -\iint_D (rot\overline{F}) \cdot \hat{N} dS$.
På D gäller att $z = 0$ och att $\hat{N} = (0,0,-1)$ (utåtriktad normal). Det ger integralen
$-\iint_D (-x^3, x, 3x^2 + 3y^2) \cdot (0,0,-1) dxdy = 3\iint_D (x^2 + y^2) dxdy = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 r dr = 24\pi$.