Lösningar till tentamen i kurserna SF1619(5B1133) och SF1621(5B1141)
Analytiska metoder och linjär algebra II.

Linjär algebra

1. Låt A vara T:s standardmatris.Dess kolumner är $T(1,0)$ och $T(0,1)$ resp.
$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. Eftersom determinanten inte är noll (utan -2) är avbildningen injektiv, dvs två olika punkter kan inte avbildas på en och samma punkt.

2. Frågan avgörs av om ekvationen $C_1\bar{v}_1 + C_2\bar{v}_2 + C_3\bar{v}_3 + C_4\bar{v}_4 = \bar{0}$ endast har triviala lösningen eller om det finns oändligt många lösningar. Ekvationen ger systemet
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix}$. Ett homogent system med fler variabler än ekvationer har alltid oändligt många lösningar. Alltså är S en linjärt beroende mängd. För att se om vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna byter vi ut nollvektorn mot denna vektor i systemet ovan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 13 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oändligt många lösningar dvs vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av de givna vektorerna.

3. Vi ser direkt att A är symmetrisk för $a = 0$ vilket krävs för ortogonal diagonalisering. Vi söker matrisens egenvärden :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & a \\ 4 & 7-\lambda & a^2+a \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\left[(\lambda-1)(\lambda-7)-16\right] = -(1+\lambda)(\lambda^2-8\lambda-9) = 0 .$$

Detta ger egenvärdena $\lambda = -1,-1,9$. $\lambda = 9$ har ett en-dimensionellt egenrum. Frågan om diagonaliserbarhet beror på dimensionen hos egenrummet till $\lambda = -1$. Vi söker egenvektorerna för olika värden på a :

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a^2+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Om $a \neq 0,1$ så får vi en parameter i lösningen och egenrummet blir en-dimensionellt. Då kan vi endast finna två linjärt oberoende egenvektorer till A som då ej är diagonaliserbar.
Om $a = 1$ får vi två parametrar i lösningen och egenrummet blir två-dimensionellt. Då kan vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer till A som då är diagonaliserbar. Fallet $a = 0$ behandlades inledningsvis.

4. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A\bar{x} + K\bar{x} - 75 = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ och

$K = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A. Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-16) - 144 = \lambda(\lambda-25) = 0 \Rightarrow \lambda = 0{,}25 .$$

Normerade egenvektorer söks:

$$\lambda = 0: \quad \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 25: \quad \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P\bar{x}'$ är en rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$(P\bar{x}')^T A(P\bar{x}') + K(P\bar{x}') - 75 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T(P^T AP)\bar{x}' + KP\bar{x}' - 75 = 0$. Då $P^T AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

och $KP = \begin{bmatrix} -10 & 70 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix}$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 75 = 0 \Rightarrow (x')^2 + 2x' + 2y' - 3 = 0$. Kvadratkomplettering ger $(x'+1)^2 + 2(y'-2) = 0$. Med koordinatbytet $\begin{cases} x'' = x'+1 \\ y'' = y'-2 \end{cases}$ som är en translation fås slutligen $(x'')^2 + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$ dvs kurvan är en parabel.

Flervariabelanalys

5. Riktningsderivatan i riktningen $\bar{u}$ ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\nabla f = (f_1, f_2)$ och riktningsvektorn $\bar{u}$ uppfyller $\|\bar{u}\| = 1$. $\nabla f \cdot \bar{u} = \|\nabla f\|\|\bar{u}\|\cos\theta = \|\nabla f\|\cos\theta$ är som störst då vinkeln θ mellan ∇f och $\bar{u}$ är 0 radianer. Då fås $D_{\bar{u}} f(1,2) = \|\nabla f(1,2)\|$.

$\nabla f = (y - \frac{5}{x+y^2}, x - \frac{10y}{x+y^2}) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (1,-3)$. Det största värdet är alltså

$\|(1,-3)\| = \sqrt{10}$.

6. De kritiska punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} f_1 = 3x^2 + 6y - 9 = 0 & (1) \\ f_2 = 6x + 6y = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1,3$$. De kritiska

punkterna är då (-1,1) och (3,-3) . Vi undersöker karaktären:

$A = f_{11} = 6x,\ B = f_{12} = 6,\ C = f_{22} = 6 \Rightarrow D = AC - B^2 = 36x - 36$.

(-1,1): D < 0 sadelpunkt, $(3,-3): D > 0,\ A > 0$ minpunkt.

7. Låt D vara enhetscirkelskivan. Då fås $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint_D \frac{(1-(x^2+y^2))}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

Polära koordinater ger nu $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{(1-r^2)}{r} rdr = \frac{4\pi}{3}$.

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området är en origocentrerad cirkelskiva med radien 3 .Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3,0)$$ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen $x^2 + y^2 = 9$

och använder då Lagranges multiplikatormetod:

Låt $L(x, y, \lambda) = (x-3)y + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = y + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_2 = x - 3 + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L_3 = x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$ Ur (1) och (2) fås $\lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{(x-3)}{2y} \Rightarrow x^2 - 3x = y^2$.

Insättning i (3) ger $2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, -\frac{3}{2}$. $x = 3 \Rightarrow y = 0$ dvs punkten (3,0).

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$ vilket ger punkterna $(\frac{-3}{2}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2})$ med funktions-

värdena $\pm\frac{27\sqrt{3}}{4}$. Dessa är de största resp minsta värdena eftersom $f(3,0) = 0$.

9. Låt det inneslutna området K begränsas av ytan S .Vi använder divergenssatsen. Flödet ges av ytintegralen

$$\iint_S (x^2y, -y^2, 4z^2)\cdot \hat{N}dS = \iiint_K (2xy-2y+8z)\,dxdydz = \iint_D (\int_0^2 (2xy-2y+8z)\,dx)\,dydz =$$

$$\iint_D \left[x^2y-2xy+8zx\right]_0^2 dydz = 16\iint_D zdydz = 16\int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy\int_0^3 zdz = 16\int_0^3 z\sqrt{9-z^2}\,dz =$$

$$=16\left[(9-z^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})\right]_0^3 = 144\ .$$

10. . Låt $y = f(x,z) = \sqrt{1-(x^2+z^2)}$. Det ger

$dS = \sqrt{(f_1)^2+(f_1)^2+1}\,dxdz = \sqrt{\dfrac{x^2+z^2}{1-(x^2+z^2)}+1}\,dxdz = \dfrac{dxdz}{\sqrt{1-(x^2+z^2)}}$. Detta är projektionen av ytelementet på $xz-$planet. Ytans projektion är området D som i $x-$led begränsas av cirkelbågarna $x = \pm\sqrt{1-z^2}$ och i $z-$led av linjerna $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vi observerar att $x^2+y^2 = 1-z^2$ på S och får:

$$Q = \iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dS = \iint_D \frac{dxdz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx = 2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dz = 2\sqrt{2}\ .$$

Alternativt kan man använda sfäriska koordinater.