Lösningsförslag till tentamen i Analytiska metoder och linjär algebra 2, den 2009–08–25.

1. En linjär avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ är inverterbar om och endast om dess värdemängd är hela $\mathbf{R}^2$. Eftersom determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

utgör vektorerna (3,1), (2,1) en bas för $\mathbf{R}^2$. A:s värdemängd är alltså hela $\mathbf{R}^2$ och A är inverterbar.

Svar: A är inverterbar.

---

2. Vi har

$$f'_x = \frac{3(2x + y - z) - 2(3x + y)}{(2x + y - z)^2}$$

$$f'_y = \frac{2x + y - z - (3x + y)}{(2x + y - z)^2}$$

$$f'_z = \frac{3x + y}{(2x + y - z)^2}$$

I punkten (1,2,3) fås $f'_x = -7$, $f'_y = -4$, $f'_z = 5$ och grad $f = (1,-2,1)$. Eftersom f är en differentierbar funktion så är

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,2,3) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \text{grad}\, f}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(-1,2,2,) \cdot (-7,-4,5)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = 3.$$

Svar: 3.

---

3. $$\iint_{\mathbf{D}} \frac{\cos(x + y)}{\sin x}\, dxdy = \int_1^2 dx \int_{-x}^0 \frac{\cos(x + y)}{\sin x}\, dy = \int_1^2 \left[\frac{\sin(x + y)}{\sin x}\right]_{-x}^0 dx = \int_1^2 dx = 1.$$

Svar: 1.

---

4. Vi har $z'_x = 2x$, $z'_y = 1$. Låt $\mathbf{D}$ vara det givna området i xy–planet:

$$0 \le y \le \sqrt{2 + 4x^2},\ 0 \le x \le 1.$$

Då gäller att arean ges av

$$\iint_{\mathbf{D}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \iint_{\mathbf{D}} \sqrt{2 + 4x^2}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2+4x^2}} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 (2 + 4x^2)\, dy = \left[2x + \frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{10}{3}.$$

Svar: $\frac{10}{3}$.

---

5. $\mathbf{S}$ ges av $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ där $x^2 + y^2 \le 1$ ($\mathbf{D}$). Vi har

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},\quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\iint_{\mathbf{S}} (1 + x + y)z\, dS = \iint_{\mathbf{D}} (1 + x + y)\sqrt{1 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy =$$

$$\iint_{\mathbf{D}} (1 + x + y)\, dx\, dy = \iint_{\mathbf{D}} dx\, dy + \iint_{\mathbf{D}} (x + y)\, dx\, dy =$$

$= \{$ symmetri m. a. p. $x + y = 0 \}$ = arean av $\mathbf{D} + 0 = \pi$.

$\boxed{\textbf{Svar: } \pi.}$

---

6. f är deriverbar, varför dess lokala extrempunkter fås ur ekvationssytemet

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}.$$

I punkten $(0,0)$ fås

$$\begin{cases} f'_x = a^3 e^{x-y} - a + y = a^3 - a = 0 \\ f'_y = -a^3 e^{x-y} + a + x = -a^3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, 0, 1,$$

alltså $(0,0)$ kan vara en lokal minimipunkt endast för dessa a–värden. Vi undersöker punktens karaktär:

$$A = f''_{xx} = a^3 e^{x-y} = a^3,$$

$$B = f''_{xy} = -a^3 e^{x-y} + 1 = 1 - a^3,$$

$$C = f''_{yy} = a^3 e^{x-y} = a^3$$

och

$$AC - B^2 = a^6 - (1 - a^3)^2 = \begin{cases} < 0 \text{ om } a = -1 \Rightarrow \text{sadel} \\ < 0 \text{ om } a = 0 \Rightarrow \text{sadel} \\ > 0 \text{ och } A > 0 \text{ om } a = 1 \Rightarrow \text{lokal minimum} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Svar: } a = 1.}$

---

7. Beteckna

$$P = y^{a+4} + (b+5)x^{b+4}y + (a+3)y^2 + 1,$$

$$Q = (a+4)xy^{a+3} + x^{b+5} + (b+4)x^2 + 2.$$

Ett nödvändig villkor för att vektorfältet (P,Q) skall vara konservativt är att $P'_y - Q'_x = 0$. Vi får

$$P'_y - Q'_x = (a+4)y^{a+3} + (b+5)x^{b+4} + 2y(a+3) - (a+4)y^{a+3} - (b+5)x^{b+4} - 2(b+4)x =$$

$$= 2y(a+3) - 2(b+4)x$$

vilket innebär att fältet kan vara konservativt endast då $a = -3$ och $b = -4$. Vi får då

$$\boldsymbol{F} = (2y + 1, 2x + 2)$$

och vi undersöker $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Vi söker en funktion U (potentialfunktion) sådan att $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{F}$, dvs $(U'_x, U'_y) = (2y + 1, 2x + 2)$.
Ur $U'_x = 2y + 1$ får man att $U = 2xy + x + f(y)$. Vi får då att $U'_y = 2x + f'_y$ och samtidigt vet vi att $U'_y = 2x + 2$. Jämförelse av dessa uttryck ger att $f'_y = 2$ alltså $f(y) = 2y +$ konstant och vi får $U = 2xy + x + 2y + C$.

$\boxed{\textbf{Svar: } 2xy + x + 2y + C.}$

---

8. Ytan $z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger på ena sidan av planet $z = x + 2y - 13$ om och endast om funktionen $f(x,y) = (x + 2y - 13) - (y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2})$ har konstant tecken. Vi söker det största och det minsta värdet av den kontinuerliga funktionen f på den kompakta mängden $3x^2 + y^2 \le 20$.
Områdets inre punkter $(20 - 3x^2 - y^2 > 0)$:

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 3 + \dfrac{3x}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \\ 0 = f'_y = 1 + \dfrac{y}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \end{cases}$$

$f'_x - 3f'_y = 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow f'_x = 0$ ger $(x,y) = (-2,-2)$ och $f(-2,-2) < 0$.

Områdets rand $(3x^2 + y^2 - 20 = 0)$: Parametrisering $x = \sqrt{\dfrac{20}{3}}\cos t,\ y = \sqrt{20}\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$,

ger $f(x,y) = \sqrt{60}\cos t + \sqrt{20}\sin t - 13 < \sqrt{60} + \sqrt{20} - 13 < 0$.

Sammanfattning: Det största värdet antas antingen i punkten $(-2,-2)$ (där f är < 0) eller på randen (där f är < 0) alltså $f(x,y) < 0$ för alla (x,y).

Svar: Ja.

---

9. Låt $f(x.y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ och $g(x,y,z) = x + y + z - 1$. Vi har

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3y^2 & 3z^2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och determinanten

$$\det \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = 1 + 3y^2 + 3z^2 \neq 0.$$

Detta medför att y och z kan lokalt lösas ur ekvationssystemet $f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$ som kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x),\ z = z(x)$. Kurvan kan parametriseras medelst $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x), z(x))$. Vi har $f(1,0,-1) = g(1,0.-1) = 0$, dvs punkten ligger på kurvan. Kurvans tangentvektor har riktning (grad f)$\times$(grad g). I punkten $(1,0,-1)$ får man

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2, 3y^2 + 1, 3z^2) = (3,1,3)$$

$$\text{grad } g = (g'_x, g'_y, g'_z) = (2,-1,1)$$

$$(\text{grad } f)\times(\text{grad } g) = (3,1,3)\times 1,-1,1) = (4,3,-5).$$

Tangentlinjen ges av $p(t) = (1 + 4t, 3t, -1 - 5t)$.

Svar: Tangentlinjen ges av $p(t) = (1 + 4t, 3t, -1 - 5t)$.

---

10. Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer hörande till egenvärdet 1. Då $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk med egenvärdet 2 får vi att planets normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor hörande till egenvärdet 2.

Talen a, b och c bestäms nu så att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man finner att $a = 1,\ b = -1$ och $c = 1$. Vi får nu

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
