KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2009–05–18, kl. 8.00–13.00.

SF1619/SF1621/5B1133/5B1141, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser

A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig komplettering
F: underkänt utan rätt till komplettering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Visa att vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{v} = (2,1,0)$ och $\boldsymbol{w} = (0,1,1)$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$ och ange koordinaterna för vektorn $(3,4,2)$ i denna bas.

2. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradienten
$$\text{grad } f = (2x + 3y,\ 4x - 5y).$$
En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $u = 2x - y$ och $v = y - x$. Bestäm gradienten av g.

3. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen
$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 2xy + 9x$$
samt ange deras karaktär.

4. Beräkna linjeintegralen
$$\int_\Gamma \frac{xy^2 + 2y}{1 + xy}\,dx + \frac{2x^2y + 3x}{1 + xy}\,dy$$
där Γ är randen av kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ genomlöpt i positiv led.

5. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\mathbf{S}} (z, y, x) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$
då $\mathbf{S}$ är den del av planet $x + y + z = 2$ där $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $z \ge 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiva komponenter.

V.g.vänd

6. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} (3x + 2y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

då **D** är det ändliga området som begränsas av linjerna $x + y = 2$, $y = x$ och $x = 0$. (4p)

7. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = 2x + y$$

i det område som ges av $y \leq 4$ och $y \geq x^2$. (4p)

8. Låt **K** vara den kropp i $\mathbf{R}^3$ som definieras av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \leq x + y \leq 2, \\ 1 \leq x + z \leq 2, \\ 1 \leq y + z \leq 2. \end{cases}$$

Beräkna integralen

$$\iiint_{\mathbf{K}} \frac{x + y}{(x + z)(y + z)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$ (4p)

9. En partikel som påverkas av kraften

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2xye^{x^2 + y},\ 2y + (1 + y)e^{x^2 + y}\right)$$

rör sig moturs längs ellipsen

$$4x^2 + y^2 = 4$$

från (0,2) till (1,0). Beräkna det arbete som kraften uträttar. (4p)

10. Finns det någon symmetrisk matris $\boldsymbol{A}$ med reella element sådan att

$$\boldsymbol{A}^2 + \mathbf{E} = \mathbf{0}?$$

(**E** betecknar enhetsmatrisen.) (4p)

Lycka till!

Lösningsförslag och informationen om kompletteringsskrivningen kommer att finnas på http://www.math.kth.se/~bronek/0809/amelia2