1. Man får att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

vilket medför att vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

Koordinaterna (x,y,z) för vektorn $(3,4,2)$ i denna bas uppfyller

$$\boldsymbol{u} = x(1,2,1) + y(2,1,0) + z(0,1,1) = (3,4,2),$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + + z = 2 \end{cases}$$

och vi finner att $x = 1, y = 1, z = 1$.

Svar: $(1,1,1)$.

---

2. Vi har

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = u + 2v \end{cases}$$

samt $\operatorname{grad} f = (2x + 3y,\ 4x - 5y) = (f'_x,\ f'_y)$. Kedjeregeln ger

$$g'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = (2x + 3y)\cdot 1 + (4x - 5y)\cdot 1 = 6x - 2y = 6(u + v) - 2(u + 2v) = 4u - 2v$$

och

$$g'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v = (2x + 3y)\cdot 1 + (4x - 5y)\cdot 2 = 10x - 7y = 10(u + v) - 7(u + 2v) = 3u - 4v,$$

alltså

$$\operatorname{grad} g = (g'_u,\ g'_v) = (4u - 2v,\ 3u - 4v).$$

Svar: $(4u - 2v,\ 3u - 7v)$

---

3. Funktionen $f(x,y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 2xy + 9x$ är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter.

De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f.

Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 14x + 2y + 9 = 0 \quad \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3 \\ f'_y = -2y + 2x = 0 \ \Rightarrow \ y = x \end{cases}$$

alltså punkterna $(1,1)$ och $(3,3)$.

Vi har $A = f''_{xx} = 6x - 14$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$ och $AC - B^2 = 24 - 12x$. Man får:

I $(1,1)$ är $AC - B^2 = 12 > 0$ och $A = -8 < 0 \Rightarrow$ en lokal maximipunkt.

I $(3,3)$ är $AC - B^2 = -12 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

Svar: Lokal maximum i $(1,1)$.

---

4. Låt

$$P = \frac{xy^2 + 2y}{1 + xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{1 + xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 2xy + 2}{(1 + xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 4xy + 3}{(1 + xy)^2}.$$

Låt $\mathbf{D}$ beteckna kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Enligt Greens formel får man

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} dxdy = \text{ arean av } \mathbf{D} = 1.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 1.}$

---

5. $\mathbf{S}$ ges av $z = 2 - x - y \Rightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\,ds = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dx\,dy = (1,1,1)\,dx\,dy$. Vid projektionen av $\mathbf{S}$ på xy–planet fås triangeln $\mathbf{D}$ med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

$$\iint_{\mathbf{S}} (z,y,x)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (2-x-y,y,x)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{D}} 2\,dx\,dy = 2\cdot\text{ arean av } \mathbf{D} = 4.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 4.}$

---

6. $$\iint_{\mathbf{D}} (3x+2y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (3x+2y)\,dy = \int_0^1 \Big[3xy + y^2\Big]_x^{2-x} dy = \int_0^1 (4 + 2x - 6x^2)\,dx =$$

$$= \Big[4x + x^2 - 2x^3\Big]_0^1 = 3.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 3.}$

---

7. Det tillåtna området är kompakt och funktionen är kontinuerlig $\Rightarrow$ det finns ett största och ett minsta värde till funktionen. Extrempunkter finns bland kritiska punkter enligt följande:

Områdets inre ($y > x^2$, $y < 4$): Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $f'_x = f'_y = 0$. Här är $f'_x = 2 \ne 0 \Rightarrow$ inga kritiska punkter i områdets inre.

På linjen $y = 4$: $f(x,y) = 2x + y = 2x + 4$ är strängt växande $\Rightarrow$ inga kritiska punkter.

På parabeln $y = x^2$: $f(x,y) = 2x + y = 2x + x^2 = g(x)$. Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $g'(x) = 0$, alltså $2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$, $y = 1$.

Skärningspunkterna mellan parabeln och linjen: $(\pm 2, 4)$.

Sammanfattningsvis får man alltså tre kritiska punkter $(-1,1)$ och $(\pm 2,4)$. I dessa punkter fås $f(-1,1) = -1$, $f(-2,4) = 0$ och $f(2,4) = 8$ alltså

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{största värdet 8, minsta } -1.}$

---

8. Variabelsubstitutionen

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x + z, \\ w = y + z \end{cases}$$

ger funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = -\frac{1}{2}$$

och

$$dxdydz = \frac{1}{2}\,dudvdw.$$

Så

$$\iiint_{\mathbf{K}} \frac{x+y}{(x+z)(y+z)}\,dxdydz = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{2}\int_{v=1}^{2}\int_{w=1}^{2} \frac{u}{v\,w}\,dudvdw =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u\,du \int_1^2 \frac{dv}{v} \int_1^2 \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_0^2 \Big[\ln v\Big]_1^2 \Big[\ln w\Big]_1^2 = (\ln 2)^2.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } (\ln 2)^2.}$

---

9. Vi söker först en potentialfunktion U, som alltså uppfyller $\boldsymbol{F} = \text{grad}\, U$, det vill säga

$$U'_x = 2xye^{x^2+y}$$
$$U'_y = 2y + (1+y)e^{x^2+y}$$

Den första ekvationen visar att

$$U = ye^{x^2+y} + g(y),$$

där $g(y)$ är en deriverbar funktion av y. Detta ger att

$$U'_y = (1+y)e^{x^2+y} + g'(y),$$

varefter jämförelse med den andra ekvationen leder till att

$$g'(y) = 2y$$

dvs

$$g(y) = y^2 + C$$

och

$$U = ye^{x^2+y} + y^2 + C$$

vilket innebär att det sökta arbetat blir lika med

$$\int_{(0,2)}^{(1,0)} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{r} = U(1,0) - U(0,2) = -4 - 2e^2.$$

Svar: $-4 - 2e^2$.

---

10. Spektralsatsen medför att egenvärdesekvationen för symmetriska reella matriser har enbart reella rötter. Låt t vara en sådan rot och låt $\boldsymbol{v}$ vara motsvarande egenvektor, dvs

$$\boldsymbol{Av} = t\boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}.$$

Vi får då

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Av}) = \boldsymbol{A}t\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{Av} = t^2\boldsymbol{v}$$

och

$$(\boldsymbol{A}^2 + \mathbf{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v} + \mathbf{E}\boldsymbol{v} = t^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = (t^2+1)\boldsymbol{v}.$$

Enligt antagandet är $\boldsymbol{A}^2 + \mathbf{E} = \mathbf{0}$, så vi får att $t^2 + 1 = 0$, vilket strider mot att t är ett reellt tal. Den erhållna motsägelsen medför att det inte finns någon sådan matris.

Svar: Nej.
