KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–08–26, kl. 14.00–19.00.

SF1619/5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig kompletterering
F: underkänt utan rätt till kompletterering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Komplettera $\boldsymbol{u} = (1,1,-3)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-1,3)$ med en vektor $\boldsymbol{w}$ sådan att $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ blir en bas för $\mathbf{R}^3$.

2. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradienten
$$\operatorname{grad} f = (x + 2y,\ 2x - 4y).$$
En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $u = 2x - y$ och $v = y - x$. Bestäm gradienten av g.

3. Bestäm Taylorpolynomet av gradtal två till funktionen
$$f(x,y) = e^{x-y} + \frac{1}{2y - x}$$
i punkten $(1,1)$.

4. Beräkna arean av del av ytan
$$3z = 3y + 2(x - 2)^{3/2}$$
vars projektion på xy–planet ges av $4 \le x \le 9$, $0 \le y \le 3$.

5. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\mathbf{S}} (z,y,x) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS$$
då $\mathbf{S}$ är den del av planet $x + y + z = 2$ där $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $z \ge 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{N}}$ har positiva komponenter.

V.g.vänd

6. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x)\,\mathrm{d}y$$

då Γ går från $(0,0)$ till $(2,-1)$ längs kurvan $x^2 + y = y^2 + x$. (4p)

7. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{y}{(2 + xy)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

då $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av hyperbeln $xy = 2$ samt linjerna $x = 1$, $x = 2$ och $y = 0$. (4p)

8. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (1 + x + y)z\,\mathrm{d}S$$

då $\mathbf{S}$ är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$. (4p)

9. Visa att

$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geq 1,$$

om $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ och $xy = 1$ då $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$ och $y > 0$. (4p)

10. Beräkna $u''_{xx}(0,0)$ då

$$u(x,y) = \iint_{\mathbf{D}_{xy}} \cos(t^2 + s^2)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s,$$

och $\mathbf{D}_{xy}$ ges av $0 \leq t \leq x,\ t - x + y \leq s \leq x + y - t$. (4p)