KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–05–19, kl. 8.00–13.00.

SF1619, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig kompletterering
F: underkänt utan rätt till kompletterering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljer man en ny bas $\boldsymbol{f} = \{7\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2, 6\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2\}$.
   a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (59,68)?
   b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den vektor som i det nya systemet har koordinaterna (13,–14)?
   c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $5x - 4y = 1$?

2. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan
$$f(x,y,z) = \ln(3x + yz - 20) - \frac{4x - 2z}{x + y - 6}$$
i punkten (5,2,3).

3. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2.$$

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1 + y}\,dx\,dy$$
över det ändliga området som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 1$.

5. Beräkna linjeintegralen
$$\int_{\Gamma} \frac{xy^2}{3 + xy}\,dx + \frac{2x^2y + 3x}{3 + xy}\,dy$$
i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (2,0) och (0,2).

V.g.vänd

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = 2x + y$$

i det område som ges av $y \leq 4$ och $y \geq x^2$. (4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (3x,\, 3y,\, 2z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

då $\mathbf{S}$ är den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy–planet. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent. (4p)

8. Betrakta vektorfältet (4p)

$$\boldsymbol{F} = (3x^2 + y,\, 3y^2 + x).$$

a. Visa att $\boldsymbol{F}$ är konservativt i xy–planet.

b. Bestäm en potential (dvs bestäm en potentialfunktion) till $\boldsymbol{F}$.

c. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} (3x^2 + y)\, \mathrm{d}x + (3y^2 + x)\, \mathrm{d}y$$

då Γ går från $(0,0)$ till $(1,2)$ längs kurvan $2x^2 - xy + 2x - y = 0$.

9. Visa att om två kvadratiska matriser $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ uppfyller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$, för någon inverterbar matris $\boldsymbol{C}$, så har de samma karakteristiska polynom.
Ovanstående skall visas för allmänna $n{\times}n$–matriser.
Ledning: använd att $\mathbf{E} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}$. (4p)

10. Låt P och Q vara två godtyckliga punkter på kurvan $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$. Kan avståndet mellan P och Q vara lika med 3? (4p)