Lösningsförslag till tentamen i SF1619, den 2008–05–19.

1. Låt $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Man får $\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$. Om en punkt har koordinaterna (x,y) i det gamla $\boldsymbol{e}$–systemet och (u,v) i det nya $\boldsymbol{f}$–systemet så har vi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 59 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

c. Vi har

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u + 6v \\ 8u + 7v \end{pmatrix}$$

vilket insatt i ekvationen $5x - 4y = 1$ ger $3u + 2v = 1$.

Svar allmänt:	a.	(5,4)
	b.	(7,6)
	c.	$3u + 2v = 1$

---

2. Vi har

$$f'_x = \frac{3}{3x + yz - 20} - \frac{4(x + y - 6) - (4x - 2z)}{(x + y - 6)^2}$$
$$f'_y = \frac{z}{3x + yz - 20} + \frac{4x - 2z}{(x + y - 6)^2}$$
$$f'_z = \frac{y}{3x + yz - 20} - \frac{-2(x + y - 6)}{(x + y - 6)^2}$$

och i punkten $(5,2,3)$ fås $\text{grad} f = (13,17,4)$. Tangentplanet ges av ekvationen

$$(\text{grad } f) \cdot (x - 5, y - 2, z - 3) = 0$$

dvs

$$(13,17,4) \cdot (x - 5, y - 2, z - 3) = 0$$

alltså

Svar: $13x + 17y + 4z = 111.$

---

3. Funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$$

är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter. De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f. Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 6y = 0 \\ f'_y = 2y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ eller } (4,12).$$

Vi har $A = f''_{xx} = 6x + 6$, $B = f''_{xy} = -6$, $C = f''_{yy} = 2$.

I punkten $(4,12)$ fås $AC - B^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ extrempunkt, $A = 30 > 0 \Rightarrow$ minimipunkt.

I punkten $(0,0)$ fås $AC - B^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt.

Svar: lokal minimum i $(4,12)$.

---

4. $$\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1 + y}\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y}\,dy \int_y^1 2x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + y}\Big[x^2\Big]_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1 - y^2}{1 + y}\,dy = \int_0^1 (1 - y)dy$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 1/2.}$

---

5. Låt

$$P = \frac{xy^2}{3 + xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{3 + xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 6xy}{(3 + xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 12xy + 9}{(3 + xy)^2}.$$

Låt **D** beteckna triangeln $0 \le x,\ 0 \le y \le 2 - x$. Enligt Greens formel får man

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = \iint_{\mathbf{D}} dxdy = \text{ arean av } \mathbf{D} = 2.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 2.}$

---

6. Det tillåtna området är kompakt och funktionen är kontinuerlig $\Rightarrow$ det finns ett största och ett minsta värde till funktionen. Extrempunkter finns bland kritiska punkter enligt följande:

Områdets inre ($y > x^2$, $y < 4$): Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $f'_x = f'_y = 0$. Här är $f'_x = 2 \neq 0$ $\Rightarrow$ inga kritiska punkter i områdets inre.

På linjen $y = 4$: $f(x,y) = 2x + y = 2x + 4$ är strängt växande $\Rightarrow$ inga kritiska punkter.

På parabeln $y = x^2$: $f(x,y) = 2x + y = 2x + x^2 = g(x)$. Kritiska punkter måste uppfylla villkoret $g'(x) = 0$, alltså $2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1,\ y = 1$.

Skärningspunkterna mellan parabeln och linjen: $(\pm 2,4)$.

Sammanfattningsvis får man alltså tre kritiska punkter $(-1,1)$ och $(\pm 2,4)$. I dessa punkter fås $f(-1,1) = -1$, $f(-2,4) = 0$ och $f(2,4) = 8$ alltså

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{största värdet 8, minsta } -1.}$

---

7. Ytans normalvektorn $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ har samma riktning som $\hat{\boldsymbol{N}}$. Om **D** betecknar ytans projektion på xy–planet, dvs cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$, så har vi

$$\iint_{\mathbf{S}} (3x, 3y, 2z) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (3x, 3y, 2 - 2x^2 - 2y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (2 + 4x^2 + 4y^2)\,dxdy = \{\text{ polära koordinater }\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (2 + 4r^2)r\,dr = \big[v\big]_0^{2\pi} \big[r^2 + r^4\big]_0^1 = 4\pi.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 4\pi.}$

8a. Vi har

$$P(x,y) = 3x^2 + y,$$
$$Q(x,y) = 3y^2 + x,$$
$$P'_y = 1 = Q'_x$$

och inga singulära punkter $\Rightarrow$ vektorfältet är konservativt i xy–planet.

8b. Vi söker en funktion $U(x,y)$ sådan att $\operatorname{grad} U = (3x^2 + y,\ 3y^2 + x)$ dvs

$$\begin{cases} U'_x = 3x^2 + y \\ U'_y = 3y^2 + x \end{cases}$$

Ekvationen $U'_x = 3x^2 + y$ medför att $U = x^3 + xy + f(y)$. Derivering ger $U'_y = x + f'_y$ samtidigt som $U'_y = 3y^2 + x$. Jämförelse av de båda uttrycken ger $f'_y = 3y^2$ dvs $f(y) = y^3 + C$ och $U = x^3 + xy + y^3 + C$.

8c. Enligt 8ab kan Γ ersättas med en godtycklig annan väg från $(0,0)$ till $(1,2)$ och linjeintegralens värde är $U(1,2) - U(0,0) = 11$.

Svar: $U = x^3 + xy + y^3 + C$. Integralen = 11.

---

9. Vi har

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} - \lambda\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}) = \det(\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{B} - \lambda\mathbf{E})\boldsymbol{C}) = \det(\boldsymbol{C}^{-1}) \cdot \det(\boldsymbol{B} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \det(\boldsymbol{C}) =$$
$$= \frac{1}{\det(\boldsymbol{C})} \cdot \det(\boldsymbol{B} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B} - \lambda\mathbf{E}).$$

---

10. Ekvationen $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ kan skrivas på formem $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = 1$, där $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Den karakteristiska ekvationen $\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$ ger två positiva egenvärden $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = 1$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips. Genom en vridning (ändrar inte avståndet mellan punkterna) kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $6x^2 + y^2 = 1$ vars halvaxellängder är $1/\sqrt{6}$ och 1. Det maximala avståndet mellan två punkter på denna ellips är 2.

Svar: Nej.
