KTH Matematik

Tentamensskrivning, 2008–03–11, kl. 8.00–13.00.

SF1619, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng.

Preliminära betygsgränser
A: godkänt på alla momenten 1–5 och 14–20 poäng på uppgifterna 6–10
B: godkänt på alla momenten 1–5 och 11–13 poäng på uppgifterna 6–10
C: godkänt på alla momenten 1–5 och 8–10 poäng på uppgifterna 6–10
D: godkänt på alla momenten 1–5 och 5–7 poäng på uppgifterna 6–10
E: godkänt på alla momenten 1–5 och 3–4 poäng på uppgifterna 6–10
Fx: underkänt med rätt till skriftlig kompletterering
F: underkänt utan rätt till kompletterering

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget. Lycka till!

---

1. Verifiera att vektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,1,1)$ och $\boldsymbol{e}_3 = (2,1,0)$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$. Bestäm koordinaterna för vektorn $(1,2,3)$ i denna bas.

2. Beräkna riktningsderivatan av funktionen
$$f(x,y,z) = \ln(3x + yz - 20) - \frac{4x - 2z}{x + y - 6}$$
i punkten $(5,2,3)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (-2,2,1)$.

3. Bestäm lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy.$$

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
där $\mathbf{D}$ är det ändliga område, som begränsas av linjerna $x = 2$ och $y = x$ samt hyperbeln $xy = 1$.

5. Beräkna linjeintegralen
$$\int_{\Gamma} \frac{xy^2}{3 + xy}\,\mathrm{d}x + \frac{2x^2y + 3x}{3 + xy}\,\mathrm{d}y$$
i positiv led runt triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

V.g.vänd

6. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = a^2 e^{2x+y} + a(2x+y) - xy.$$

För vilka värden på konstanten a har f ett lokalt minimivärde i punkten $(0,0)$? (4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (x,y,z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

då $\mathbf{S}$ är den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy–planet. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent. (4p)

8. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av planen $z = x - y$, $z = 2x - 2y$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (4p)

9. Låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ vara kvadratiska inverterbara matriser. Visa att matriserna $\boldsymbol{AB}$ och $\boldsymbol{BA}$ har samma karakteristiska polynom.
Ledning: använd att $\mathbf{E} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$. (4p)

10. Som synes är $(x,y) = (0,0)$ en lösning till ekvationen $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$. Visa att det inte finns någon annan lösning. (4p)