Lösningsförslag till tentamen i SF1619, den 2008–03–11.

1. Man får att determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

vilket medför att vektorerna $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$.

Koordinaterna (x,y,z) till den givna vektorn i den givna basen är lösningar till ekvationen

$$x(1,2,1) + y(1,1,1) + z(2,1,0) = (1,2,3)$$

dvs lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Vi utför Gausselimination och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Upenbarligen har vi att $z = -1$ varur $y = -3z = 3$ och $x = 1 - y - 2z = 0$.

Svar: (0,3,–1).

---

2. Vi har

$$f'_x = \frac{3}{3x + yz - 20} - \frac{4(x + y - 6) - (4x - 2z)}{(x + y - 6)^2}$$

$$f'_y = \frac{z}{3x + yz - 20} + \frac{4x - 2z}{(x + y - 6)^2}$$

$$f'_z = \frac{y}{3x + yz - 20} - \frac{-2(x + y - 6)}{(x + y - 6)^2}$$

och i punkten (5,2,3) fås $\operatorname{grad} f = (13,17,4)$. Man får $|\boldsymbol{v}| = 3$ och

$$f'_{\boldsymbol{v}} = \frac{(\operatorname{grad} f) \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{(13,17,4) \cdot (-2,2,1)}{3} = 4.$$

Svar: 4.

---

3. Funktionen

$$f(x,y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy$$

är definierad i hela xy–planet $\Rightarrow$ definitionsmängden innehåller inga randpunkter. De partiella derivatorna till f är definierade i varje punkt i xy–planet $\Rightarrow$ det finns inga singulära punkter till f. Kritiska punkter fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 6y = 0 & \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1 \\ f'_y = 6y - 6x = 0 \Rightarrow y = x \end{cases}$$

alltså punkterna (0,0) och (1,1).

Vi har $A = f''_{xx} = 12x$, $B = f''_{xy} = -6$, $C = f''_{yy} = 6$ och $AC - B^2 = 72x - 36$. Man får:

I (0,0) är $AC - B^2 = -36 < 0 \Rightarrow$ en sadelpunkt.

I (1,1) är $AC - B^2 = 36 > 0$ och $A = 12 > 0 \Rightarrow$ en lokal minimipunkt.

Svar: Lokal minimum i (1,1).

---

4. $\displaystyle\iint_{\mathbf{D}} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy = \int_1^2 x^2\, dx \int_{1/x}^{x} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_1^2 x^2 \Big[-\frac{1}{y}\Big]_{1/x}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{9}{4}.$

Svar: $\frac{9}{4}$.

---

5. Låt

$$P = \frac{xy^2}{3 + xy} \quad \text{och} \quad Q = \frac{2x^2y + 3x}{3 + xy}.$$

Vi har

$$P'_y = \frac{x^2y^2 + 6xy}{(3 + xy)^2} \quad \text{och} \quad Q'_x = \frac{2x^2y^2 + 12xy + 9}{(3 + xy)^2}.$$

Låt $\mathbf{D}$ beteckna triangeln $0 \le x,\ 0 \le y \le 2 - x$. Enligt Greens formel får man

$$\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_{\mathbf{D}} (Q'_x - P'_y)\, dxdy = \iint_{\mathbf{D}} dxdy = \text{ arean av } \mathbf{D} = 2.$$

Svar: 2.

---

6. f är deriverbar, varför dess lokala extrempunkter fås ur ekvationssytemet

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}.$$

I punkten $(0,0)$ fås

$$\begin{cases} f'_x = 2a^2e^{2x+y} + 2a - y = 2a^2 + 2a = 0 \\ f'_y = a^2e^{2x+y} + a - x = a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1, 0,$$

alltså $(0,0)$ kan vara en lokal minimipunkt endast för dessa a–värden. Vi undersöker punktens karaktär:

$$A = f''_{xx} = 4a^2e^{2x+y} = 4a^2$$

$$B = f''_{xy} = 2a^2e^{2x+y} - 1 = 2a^2 - 1$$

$$C = f''_{yy} = a^2e^{2x+y} = a^2$$

$$AC - B^2 = 4a^4 - (2a^2 - 1)^2 = 4a^2 - 1$$

och

$$AC - B^2 = \begin{cases} < 0 \text{ om } a = 0 \Rightarrow \text{sadel} \\ > 0 \text{ och } A > 0 \text{ om } a = -1 \Rightarrow \text{lokal minimum} \end{cases}$$

Svar: $a = -1$.

---

7. Ytans normalvektorn $(-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$ har samma riktning som $\hat{\boldsymbol{N}}$. Om $\mathbf{D}$ betecknar ytans projektion på xy–planet, dvs cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$, så har vi

$$\iint_{\mathbf{S}} (x,y,z) \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS = \iint_{\mathbf{D}} (x,y,1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (1 + x^2 + y^2)\, dxdy = \{\text{ polära koordinater }\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (1 + r^2) r\, dr = \big[v\big]_0^{2\pi} \big[r^2/2 + r^4/4\big]_0^1 = 3\pi/2.$$

Svar: $3\pi/2$.

---

8. Kroppens projektion, $\mathbf{D}$, på xy–planet ges av $x^2 + y^2 \leq 1$. Planen $z = x - y$, $z = 2x - 2y$ skär varandra längs linjen $y = x$ i xy–planet. Denna linje delar $\mathbf{D}$ i två delar $\mathbf{D}_1$ och $\mathbf{D}_2$ svarande mot $x \leq y$ och $y \leq x$. På $\mathbf{D}_1$ har vi $x - y \geq 2x - 2y$ och motsvarande volym är

$$V_1 = \iint_{\mathbf{D}_1} ((x - y) - (2x - 2y))\, dxdy = \{ \text{ polära koordinater } \} =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} dv \int_0^1 (r \sin v - r \cos v) r\, dr = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin v - \cos v)\left[r^3/3\right]_0^1 dv =$$

$$= 1/3 \left[-\cos v - \sin v\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}/3.$$

P.g.a symmetrin har den andra delen av kroppen lika stor volym.

$\boxed{\textbf{Svar: } 4\sqrt{2}/3.}$

---

9. Vi har

$$\det(\boldsymbol{AB} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\boldsymbol{AB} - \lambda\boldsymbol{AA}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}^{-1})) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}^{-1}) =$$
$$= \det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}^{-1}) \cdot \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{BA} - \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{BA} - \lambda\mathbf{E})$$

---

10. Betrakta funktionen $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2)$. Vi kommer att visa att f antar ett minsta värde, att detta värdet är 1 och att det antas endast i punkten $(0,0)$.

För $4x^2 + 3y^2 \geq 3$ har vi $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) \geq 3 + \cos(2x^2 + y^2) \geq 3 - 1 = 2.$

På den slutna ellipsskivan $4x^2 + 3y^2 \leq 3$ antar den kontinuerliga funktionen f ett minsta värde och detta värde måste antas i en kritisk punkt i skivans inre (f har inga singulära punkter och skivans rand är redan undersökt). Vi har

$f'_x = 8x - 4x \sin(2x^2 + y^2) = 4x(2 - \sin(2x^2 + y^2)) = 0 \iff x = 0$ och

$f'_y = 6y - 2y \sin(2x^2 + y^2) = 2y(3 - \sin(2x^2 + y^2)) = 0 \iff y = 0$

alltså $(0,0)$ är den enda kritiska punkten och därmed den enda punkten där funktionen antar ett minsta värde.
