

## Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 110823.

### Linjär algebra

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

På samma sätt analyseras vektorn  $(2, -3, 1)$ . Resultatet är att den 1:a och sista vektorn är egenvektorer med egenvärdena 1 resp -4. Den andra och tredje vektorn är inte egenvektorer till matrisen.

2. Vi söker matrisens egenvärden och egenvektorer:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 7.$$

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Det ger egenvektorerna } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\lambda = 7: \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Det ger egenvektorerna } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t, \quad -\infty < t < +\infty$$

En matris som diagonaliserar  $A$  är då  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  som ger diagonalmatrisen  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ .

3. För att avgöra om vektorerna är linjärt oberoende eller inte löser vi ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Entydig lösning ger att vektorerna är linjärt}$$

oberoende. För att se om vektorn  $(1, 0, 2, 3)$  är en linjärkombination av vektorerna i  $S$  löser vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}. \text{ Den sista raden visar att systemet är in-}$$

konsistent dvs  $(1, 0, 2, 3) \notin \text{Span}(S)$ .

4.  $T$  är linjär eftersom

$$1. T(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \times \bar{v} = \bar{u}_1 \times \bar{v} + \bar{u}_2 \times \bar{v} = T(\bar{u}_1) + T(\bar{u}_2) \text{ och}$$

$$2. T(k\bar{u}) = (k\bar{u}) \times \bar{v} = k(\bar{u} \times \bar{v}) = kT(\bar{u})$$

gäller för all reella tal  $k$  och alla vektorer  $\bar{u}$ .

Standardmatrisens kolumner utgörs av

$T(\bar{e}_1)$ ,  $T(\bar{e}_2)$ ,  $T(\bar{e}_3)$ . Dessa beräknas:

$T(\bar{e}_1) = (1,0,0) \times (a,b,c) = \dots = (0,-c,b)$ ,  $T(\bar{e}_2) = (0,1,0) \times (a,b,c) = \dots = (c,0,-a)$  och  $T(\bar{e}_3) = (0,0,1) \times (a,b,c) = \dots = (-b,a,0)$ . Detta ger standardmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

## Flervariabelanalys

5. Vi använder kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} \frac{\partial f}{\partial x} \text{ och}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{s}{u^2} \frac{\partial f}{\partial y}. \text{ Insättning visar att den givna ekvationen}$$

är uppfylld.

6. Riktningderivatan ges av  $D_{\bar{u}}f = \nabla f \cdot \bar{u}$  där riktningsvektorn  $\bar{u}$  har längden 1.

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (e^{x-y}, -e^{x-y}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,-1), \quad \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \text{ som ger}$$

$$D_{\bar{u}}f = (1,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 0. \text{ Riktningderivatan är maximal då riktningsvektorn}$$

är den normerade gradientvektorn dvs då  $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ . I det fallet får riktnings-

derivatan värdet  $\sqrt{2}$  dvs det finns ingen riktning i vilken riktningsderivatan i origo antar värdet 3.

7. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_D y\sqrt{x} \, dx dy &= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx \int_{x^2}^{2-x^2} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x}((2-x^2)^2 - x^4) \, dx = \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{x}(1-x^2) \, dx = 2 \int_0^1 (x^{1/2} - x^{5/2}) \, dx = 2 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{7} x^{7/2} \right]_0^1 = \dots = \frac{16}{21}. \end{aligned}$$

8. Eftersom  $f$  är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_2 = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, Y) = (0,0), (1,1) \text{ där endast } (1,1) \text{ är en inre punkt i vilken}$$

$f$  antar värdet  $-1$ . Vi undersöker nu de fyra räta linjer som utgör området rand:

1.  $y = 0: f(x,0) = x^3$ .  $f$  växer från värdet  $0$  i origo till värdet  $64$  vid  $x = 4$ .
2.  $x = 0: f(0,y) = y^3$ .  $f$  växer från värdet  $0$  i origo till värdet  $64$  vid  $y = 4$ .
3.  $x = 4: f(4,y) = 64 - 12y + y^3$  som har minimivärdet  $48$  i punkten  $(4,2)$ .
4.  $y = 4: f(x,4) = 64 - 12x + x^3$  som har minimivärdet  $48$  i punkten  $(2,4)$ .

Intressanta är också hörnpunkterna som är ändpunkter vid respektive envariabelanalys på de fyra kantlinjerna:

$f(0,0) = 0$ ,  $f(4,0) = f(0,4) = 64$ ,  $f(4,4) = 80$ . Slutsatsen blir att det största värdet är  $80$  och det minsta är  $-1$ .

9. Eftersom  $\frac{\partial}{\partial x}(x + 3y^2 \sin x) = \frac{\partial}{\partial y}(y^3 \cos x + y)$  är vektorfältet konservativt och

därmed får vi byta väg mellan cirkelbågens ändpunkter. Vi väljer att gå längs koordinataxlarna:

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_1^0 0 dt = 0. \quad C_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 0 dt. \quad \text{Linje-}$$

integralens värde är alltså  $0$ .

$$10. \operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y^3 \cos z & x^3 e^z & xyz \end{vmatrix} = (xz - x^3 e^z, x + y^3 \sin z - yz, 3x^2 e^z + 3y^2 \cos z).$$

Ytan  $S$ : s ekvation kan skrivas  $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{(z-1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$  dvs den är en ellipsoid

med centrum i punkten  $(0,0,1)$ . Endast den del som är ovanför  $xy$ -planet är aktuell. Vi vill använda divergenssatsen och lägger till den cirkelskiva  $D$  som fås då  $z = 0$  dvs  $x^2 + y^2 \leq 4$ .  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} = z - 3x^2 e^z + 3y^2 \sin z - z + 3x^2 e^z - 3y^2 \sin z = 0$ . Om det inneslutna området kallas  $K$  får vi enligt divergenssatsen:

$$\iiint_{S+D} (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{F} dx dy dz = 0 \Rightarrow \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \hat{N} dS = - \iint_D (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \hat{N} dS.$$

På  $D$  gäller att  $z = 0$  och att  $\hat{N} = (0,0,-1)$  (utåtriktad normal). Det ger integralen

$$- \iint_D (-x^3, x, 3x^2 + 3y^2) \cdot (0,0,-1) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 r dr = 24\pi.$$

