

Lösningar till tentamen i kurs SF1617/5B1131 Matematiska metoder II, för S 110111.

Linjär algebra

1. Låt A vara T 's standardmatris. Dess kolumner är $T(1,0)$ och $T(0,1)$ resp.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}. \text{ Eftersom determinanten inte är noll (utan } -2) \text{ är avbildningen}$$

injektiv, dvs två olika punkter kan inte avbildas på en och samma punkt.

2. Frågan avgörs av om ekvationen $C_1\bar{v}_1 + C_2\bar{v}_2 + C_3\bar{v}_3 + C_4\bar{v}_4 = \bar{0}$ endast har triviala lösningen eller om det finns oändligt många lösningar. Ekvationen ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Ett homogent system med fler variabler än ekvationer har}$$

alltid oändligt många lösningar. Alltså är S en linjärt beroende mängd. För att se om vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna byter vi ut nollvektorn mot denna vektor i systemet ovan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 19 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 13 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & -1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oändligt många lösningar dvs vektorn $(0,1,0)$ kan uttryckas som en linjärkombination av de givna vektorerna.

3. Vi ser direkt att A är symmetrisk för $a = 0$ vilket krävs för ortogonal diagonalisering. Vi söker matrisens egenvärden :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & a \\ 4 & 7-\lambda & a^2+a \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1+\lambda)[(\lambda-1)(\lambda-7)-16] = -(1+\lambda)(\lambda^2-8\lambda-9) = 0.$$

Detta ger egenvärdena $\lambda = -1, -1, 9$. $\lambda = 9$ har ett en-dimensionellt egenrum. Frågan om diagonaliserbarhet beror på dimensionen hos egenrummet till $\lambda = -1$. Vi söker egenvektorer för olika värden på a :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a^2+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Om } a \neq 0,1 \text{ så får vi en parameter i}$$

lösningen och egenrummet blir en-dimensionellt. Då kan vi endast finna två linjärt oberoende egenvektorer till A som då ej är diagonaliserbar.

Om $a = 1$ får vi två parametrar i lösningen och egenrummet blir två-dimensionellt. Då kan vi finna tre linjärt oberoende egenvektorer till A som då är diagonaliserbar. Fallet $a = 0$ behandlades inledningsvis.

4. På matrisform kan ekvationen skrivas $\bar{x}^T A \bar{x} + K \bar{x} - 75 = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ och

$K = [-10 \ 70]$. Vi vill diagonalisera A ortogonalt och söker egenvärden och egenvektorer.

Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortogonala egenvektorer till A . Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & 12 \\ 12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 16) - 144 = \lambda(\lambda - 25) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 25.$$

Normerade egenvektorer söks:

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 25: \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{p} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi väljer $P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det P = +1$ och koordinattransformationen $\bar{x} = P \bar{x}'$ är en

rotation. Insättning i matrisekvationen ovan ger

$$(P \bar{x}')^T A (P \bar{x}') + K (P \bar{x}') - 75 = 0 \Rightarrow (\bar{x}')^T (P^T A P) \bar{x}' + K P \bar{x}' - 75 = 0. \text{ Då } P^T A P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och $K P = [-10 \ 70] \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = [50 \ 50]$ får vi med $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [50 \ 50] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 75 = 0 \Rightarrow (x')^2 + 2x' + 2y' - 3 = 0. \text{ Kvadratkom-}$$

lettering ger $(x'+1)^2 + 2(y'-2) = 0$. Med koordinatbytet $\begin{cases} x' = x'+1 \\ y' = y'-2 \end{cases}$ som är en

translation fås slutligen $(x'')^2 + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{2}(x'')^2$ dvs kurvan är en parabel.

Flervariabelanalys

5. Riktningderivatan i riktningen \bar{u} ges av $D_{\bar{u}} f = \nabla f \cdot \bar{u}$ där $\nabla f = (f_1, f_2)$ och riktningsvektorn \bar{u} uppfyller $\|\bar{u}\| = 1$. $\nabla f \cdot \bar{u} = \|\nabla f\| \|\bar{u}\| \cos \theta = \|\nabla f\| \cos \theta$ är som störst då vinkeln θ mellan ∇f och \bar{u} är 0 radianer. Då fås $D_{\bar{u}} f(1,2) = \|\nabla f(1,2)\|$.

$$\nabla f = \left(y - \frac{5}{x+y^2}, x - \frac{10y}{x+y^2} \right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (1, -3). \text{ Det största värdet är alltså}$$

$$\|(1, -3)\| = \sqrt{10}.$$

6. De kritiska punkterna fås ur systemet

$$\begin{cases} f_1 = 3x^2 + 6y - 9 = 0 & (1) \\ f_2 = 6x + 6y = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, 3 . \text{ De kritiska}$$

punkterna är då $(-1, 1)$ och $(3, -3)$. Vi undersöker karaktären:

$$A = f_{11} = 6x, \quad B = f_{12} = 6, \quad C = f_{22} = 6 \Rightarrow D = AC - B^2 = 36x - 36 .$$

$(-1, 1)$: $D < 0$ sadelpunkt, $(3, -3)$: $D > 0, A > 0$ minpunkt.

7. Låt D vara enhetscirkelskivan. Då fås $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \int_{x^2+y^2}^1 dz = \iint_D \frac{(1 - (x^2 + y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

$$\text{Polära koordinater ger nu } \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{(1-r^2)}{r} r dr = \frac{4\pi}{3} .$$

8. Eftersom f är kontinuerlig och området är slutet och begränsat antas ett största och ett minsta värde. Detta sker i en kritisk punkt eller en randpunkt eftersom singulära punkter saknas. Området är en origocentrerad cirkelskiva med radien 3 . Vi studerar först det inre:

$$\begin{cases} f_1 = y = 0 \\ f_2 = x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3, 0) \text{ som inte är en inre punkt. Vi studerar sedan randen } x^2 + y^2 = 9$$

och använder då Lagranges multiplikatormetod:

Låt $L(x, y, \lambda) = (x - 3)y + \lambda(x^2 + y^2 - 9)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} L_1 = y + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_2 = x - 3 + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L_3 = x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases} \text{ Ur (1) och (2) fås } \lambda = -\frac{y}{2x} = -\frac{(x-3)}{2y} \Rightarrow x^2 - 3x = y^2 .$$

Insättning i (3) ger $2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, -\frac{3}{2}$. $x = 3 \Rightarrow y = 0$ dvs punkten $(3, 0)$.

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ vilket ger punkterna } \left(-\frac{3}{2}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ med funktions-}$$

värdena $\pm \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Dessa är de största resp minsta värdena eftersom $f(3, 0) = 0$.

9. Låt det inneslutna området K begränsas av ytan S . Vi använder divergenssatsen. Flödet ges av ytintegralen

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2 y, -y^2, 4z^2) \cdot \hat{N} dS &= \iiint_K (2xy - 2y + 8z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^2 (2xy - 2y + 8z) dx \right) dy dz = \\
\iint_D [x^2 y - 2xy + 8zx]_0^2 dy dz &= 16 \iint_D z dy dz = 16 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^3 z dz = 16 \int_0^3 z \sqrt{9-z^2} dz = \\
&= 16 \left[(9-z^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^3 = 144 .
\end{aligned}$$

10. . Låt $y = f(x, z) = \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}$. Det ger

$$dS = \sqrt{(f_1)^2 + (f_3)^2 + 1} dx dz = \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{1 - (x^2 + z^2)} + 1} dx dz = \frac{dx dz}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}} .$$

Detta är projek-

tionen av ytelementet på xz -planet. Ytans projektion är området D som i x -led begränsas av cirkelbågarna $x = \pm\sqrt{1-z^2}$ och i z -led av linjerna $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi obser-

verar att $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ på S och får:

$$Q = \iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS = \iint_D \frac{dx dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx = 2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dz = 2\sqrt{2} .$$

Alternativt kan man använda sfäriska koordinater.