KTH Matematik

Tentamen i kurserna SF1617 och 5B1131 Matematiska metoder II för S.
Tisdagen den 24 augusti 2010 kl 1400-1900.

För dem som sedan tidigare har godkänt resultat på linjäralgebradelen (TenA) krävs minst 9 poäng på flervariabelanalysdelen för betyg E på hela kursen.
För dem som sedan tidigare har godkänt resultat på flervariabelanalysdelen (TenB) krävs minst 6 poäng på linjäralgebradelen för betyg E på hela kursen.
För dem som sedan tidigare inte har godkänt resultat på någon del krävs minst 15 poäng för betyg E.
De som uppnår 13 eller 14 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen. För betyg Fx på TenA resp TenB krävs 5p resp 8p.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 19, 23, 27 resp 31 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Linjär algebra

1. För den linjära avbildningen $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,0) = (1,3)$ och $T(0,1) = (1,4)$. Visa att T är inverterbar och bestäm $T^{-1}(2,5)$. (3p)

2. Bestäm standardmatrisen för den linjära operator i planet som sammansätts av en spegling i $x-$axeln följd av en rotation moturs 30 grader följd av en ortogonal projektion på $y-$axeln. (3p)

3. Låt A vara matrisen $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris P sådan att $P^{-1}AP$ är diagonal. Använd sedan detta för att beräkna matrisen A^7. (4p)

4. Låt A vara en inverterbar $n \times n-$ matris och låt $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ vara en linjärt oberoende mängd vektorer i $\mathbf{R}^n$. Visa att mängden $S = \{A\bar{v}_1, A\bar{v}_2, ..., A\bar{v}_n\}$ är linjärt oberoende. (4p)

Flervariabelanalys

5. Undersök om funktionen $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ har ett gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. (3p)

6. I vilken riktning, utgående från punkten $(1,0)$, växer funktionen $f(x,y) = \arctan(x+y) + e^{xy}$ snabbast? Ordentlig motivering krävs. (3p)

VGV

7. Beräkna linjeintegralen $\int_C (x^2+y)\,dx+(x+y^2)\,dy$ där C är den del av kurvan $x^3+y^3+5x-y=0$ som genomlöps från punkten (0,0) till punkten (-1,2) . (3p)

8. Använd divergenssatsen (Gauss´sats) för att beräkna flödet av vektorfältet $\overline{F}=(xy+z,y-y^2,x+yz)$ ut ur det slutna område som begränsas av ytorna $z=8-(x^2-y^2)$ och $z=x^2+3y^2$. (4p)

9. Bestäm arean av den del av konen $x^2+y^2=z^2$ som bestäms av olikheterna $0\le y\le \dfrac{1}{x^2}$, $x\ge 3$ och $z\ge 0$. (4p)

10. Visa att det finns en omgivning av punkten $(x,y,z,u)=(1,-3,2,-1)$ i vilken ekvationssystemet $\begin{cases} x=z^2+zu-u^2 \\ y=2zu+u^2 \end{cases}$ definierar två (kontinuerligt deriverbara) funktioner $z(x,y)$ och $u(x,y)$. Beräkna $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ i punkten $(x,y)=(1,-3)$. (4p)